CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

Premettiamo una Definizione: si chiama atto di moto di un sistema materiale in un dato istante t, l'insieme delle velocità di tutti i punti del sistema all'istante t. E' errato parlare di "velocità" di un sistema, perchè in generale i punti non hanno la stessa velocità. Bisogna parlare di velocità.

Il moto di un sistema di punti materiali si dice rigido se le distanze fra essi sono costanti nel tempo, ovvero

$$|P_1 - P_2| = \text{cost} \qquad \forall P_1, P_2 \in \mathcal{S} \tag{1}$$

Tutte le volte che le dimensioni del corpo sono trascurabili rispetto al campo in cui avviene il moto, si può parlare di punto materiale.

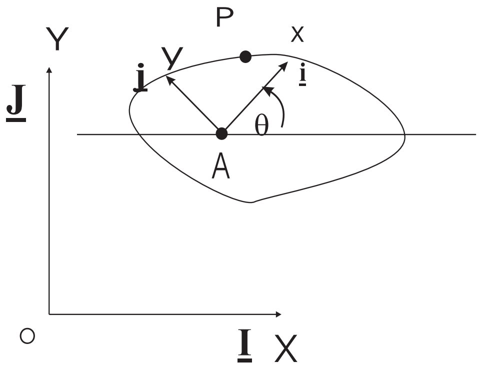
Corpo Rigido: corpo soggetto solo a moti rigidi. Schematizza, entro certi limiti, il comportamento di molti solidi naturali.

Punto Solidale: i punti fissati attorno al corpo seguono il corpo rigido nel suo movimento.

Osservazione: anche un corpo deformabile può muoversi rigidamente.

Problema: come individuare la posizione di un C.R. nello spazio?

Studiamo prima il caso piano



(2)

I versori $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ sono solidali con il corpo rigido e sono definiti a piacere. Ruotando X di θ verso x, si ottiene la sovrapposizione degli assi che individua l'orientazione della terna solidale. La posizione della coppia $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ rispetto alla coppia di versori $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ si individua nel seguente modo:

$$\begin{cases} \vec{i} = \alpha_{11}\vec{I} + \alpha_{12}\vec{J} \\ \vec{j} = \alpha_{21}\vec{I} + \alpha_{22}\vec{J} \end{cases}, \tag{3}$$

con le condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = 1 \\ \vec{i} \times \vec{j} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1 \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

dove i coefficienti $\alpha_{ij}(t)$ sono 4 funzioni del tempo legate dalle 3 condizioni precedenti. Esiste un parametro indipendente. Dal disegno possiamo ricavare che

$$\begin{cases} \vec{i} = \alpha_{11}\vec{I} + \alpha_{121}\vec{J} = \underbrace{\cos\theta}_{\alpha_{11}}\vec{I} + \underbrace{\sin\theta}_{\alpha_{12}}\vec{J} \\ \vec{j} = \alpha_{21}\vec{I} + \alpha_{22}\vec{J} = \underbrace{-\sin\theta}_{\alpha_{21}}\vec{I} + \underbrace{\cos\theta}_{\alpha_{22}}\vec{J} \end{cases}. \tag{5}$$

Descriviamo ora le coordinate del punto P tramite la coppia (x, y) e la coppia (X, Y). $P(x, y)$ descrive la posizione del punto P in un sistema di coordinate solidale con il C.R., per cui $P(x, y)$ è rappresentato da delle costanti. Scriviamo la posizione di P rispetto all'origine O

$$\mathbf{P} - \mathbf{O} = (\mathbf{P} - \mathbf{A}) + (\mathbf{A} - \mathbf{O}) = x\vec{i} + y\vec{j} + X_A\vec{I} + Y_A\vec{J}. \tag{6}$$

Introducendo la dipendenza dal tempo t, possiamo scrivere

$$(\mathbf{P} - \mathbf{O})(t) = x\vec{i}(t) + y\vec{j}(t) + X_A(t)\vec{I} + Y_A(t)\vec{J}. \tag{7}$$

La coppia (x, y) è costante, mentre $\vec{i}(t)$ e $\vec{j}(t)$ sono noti se è noto $\theta(t)$. La posizione del C.R. nel piano è nota se sono noti (X_A, Y_A, θ). Nello spazio esistono gli angoli di Eulero (θ, ϕ, ψ). Si ricavano con un procedimento analogo a quello del piano, ma con un grado di complessità superiore.

Moti Rigidi Particolari

Moto Traslatorio

<u>Def.</u> Si dice che un C.R. si muove di moto traslatorio se $\forall P_1, P_2 \in C.R. \Longrightarrow \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ è un vettore costante nel tempo in modulo, direzione e verso.

1. Il moto è traslatorio se i versori della terna sono costanti. Infatti

   $$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = [(\mathbf{P}_2 - \mathbf{A}) + (\mathbf{A} - \mathbf{O})] - [(\mathbf{P}_1 - \mathbf{A}) + (\mathbf{A} - \mathbf{O})] = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{A}) - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{A})$$

   $$x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) = cost. \tag{8}$$

2. Il moto è traslatorio se i punti del sistema hanno la stessa velocità (variabile istante per istante, in generale), denominata <u>velocità del moto traslatorio</u> $\vec{v}$.

   <u>Dim.</u> Il moto è traslatorio $\Longrightarrow \forall P_1, P_2 \in C.R\ \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = cost.$ Ma anche $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{O}) - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{O}) = cost.$ Derivando rispetto al tempo t si ottiene

   $$\vec{v}_{P_2} - \vec{v}_{P_1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_1}. \tag{9}$$

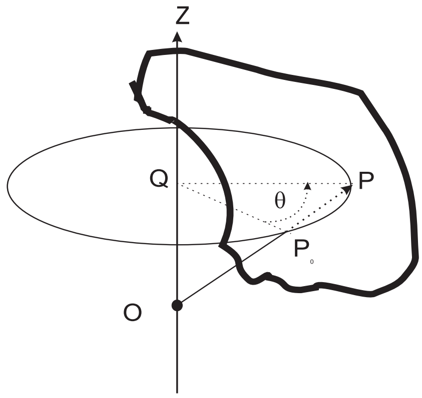
   Viceversa, se $\vec{v}$ è costante, allora tutti i punti si muovono di moto rettilineo uniforme.

Moto Rotatorio

Def. Un moto rigido si dice rotatorio se rimangono fissi nel moto i punti di una retta (asse di rotazione)

In realtà, basta che siano fissi due punti appartenenti alla retta.

Detti P punto fuori dall'asse e Q piede della perpendicolare, tutti i punti descrivono in un intervallo Δt archi di circonferenza con angoli al centro $\Delta\theta$. Si definisce la velocità angolare del moto rotatorio il vettore $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$.



La velocità di P si calcola con

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = \vec{\omega} \wedge [(\mathbf{P} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{Q})] = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{O} - \mathbf{Q}) \quad (10)$$

con $\mathbf{O}$ punto qualunque dell'asse z. Ma $\vec{\omega} \parallel (\mathbf{O} - \mathbf{Q}) \implies \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$.

Vogliamo ora calcolare la velocità di un punto Psolidale con il C.R. che si muove rispetto ad un sistema di riferimento con origine O.

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \frac{d}{dt}[(\mathbf{P} - \mathbf{O}) + (\mathbf{A} - \mathbf{O})] = \vec{v}_A + \frac{d}{dt}(\mathbf{P} - \mathbf{A}). \quad (11)$$

$\mathbf{P} - \mathbf{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ con (x, y, x) costanti. Quindi

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \vec{v}_A + x\frac{d}{dt}\vec{i} + y\frac{d}{dt}\vec{j} + z\frac{d}{dt}\vec{k}. \quad (12)$$

Ricordiamo che $\vec{i} = \alpha_{11}(t)\vec{I} + \alpha_{12}(t)\vec{J} + \alpha_{13}(t)\vec{K}, \vec{j} = \alpha_{21}(t)\vec{I} + \ldots$ $\alpha_{ij}(t)$sono funzioni degli angoli di Eulero. Vogliamo calcolare $\frac{d}{dt}\vec{i}, \frac{d}{dt}\vec{j}, \frac{d}{dt}\vec{k}$. Ricaviamo le seguenti identità dalle regole del prodotto scalare per i versori $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{i} = 1 & \implies & \frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \times \vec{j} = 1 & \implies & \frac{d}{dt}\vec{j} \times \vec{j} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{k} = 1 & \implies & \frac{d}{dt}\vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

e

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = 0 & \implies & \frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{i} \times \frac{d}{dt}\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{k} = 0 & \implies & \frac{d}{dt}\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{j} \times \frac{d}{dt}\vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{i} = 0 & \implies & \frac{d}{dt}\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{k} \times \frac{d}{dt}\vec{i} \end{cases} \quad (14)$$

Teorema di Poisson

Sia C un corpo rigido in moto, $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ siano i versori di una terna ortonormale destra solidale con il corpo. Esiste ed è unico un vettore $\vec{\omega}$, indipendente dalla terna scelta tale che le derivate dei versori $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ rispetto al tempo t siano espresse da:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} \\ \frac{d}{dt}\vec{j} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} \\ \frac{d}{dt}\vec{k} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} \end{cases}, \tag{15}$$

tale vettore viene detto velocità angolare.

Dim. La dimostrazione si basa su tre punti: 1) esistenza, 2) unicità e 3)indipendenza dalla terna prescelta.

1. Dimostriamo che esiste un vettore $\vec{\omega}$ tale che
$$\vec{\omega} = \left(\frac{d}{dt}\vec{j} \times \vec{k}\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dt}\vec{k} \times \vec{i}\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\vec{k}. \tag{16}$$
Verifichiamo tale formula calcolando $\vec{\omega} \wedge \vec{i}, \vec{\omega} \wedge \vec{j}$ e $\vec{\omega} \wedge \vec{k}$.
$$\vec{\omega} \wedge \vec{i} = \left[\left(\frac{d}{dt}\vec{j} \times \vec{k}\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dt}\vec{k} \times \vec{i}\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\vec{k}\right] \wedge \vec{i}$$
$$\left(\frac{d}{dt}\vec{k} \times \vec{i}\right)\left[\vec{j} \wedge \vec{i}\right] + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\left[\vec{k} \wedge \vec{i}\right] = \left(\frac{d}{dt}\vec{k} \times \vec{i}\right)\left[-\vec{k}\right] + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\left[\vec{j}\right]. \tag{17}$$
Utilizzando le tabelle 13 e 14, scambiamo i fattori tra loro, per cui
$$\left(-\vec{k} \times \frac{d}{dt}\vec{i}\right)\left[-\vec{k}\right] + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\left[\vec{j}\right] = \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{k}\right)\vec{k} + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\vec{j}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{i}\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{k}\right)\vec{k} = \frac{d}{dt}\vec{i}. \tag{18}$$
Si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo inserito un coefficiente *nullo*
$$\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{i} = 0. \tag{19}$$
Questa aggiunta ci ha permesso di poter ricostruire il vettore $\frac{d}{dt}\vec{i}$. Analogamente l'esistenza si dimostra per gli altri due versori.

2. Unicità. Dimostrazione per assurdo. Supponiamo che per la terna assegnata $\left(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ esista un secondo vettore $\vec{\omega}' \neq \vec{\omega}$ tale che valgano le equazioni di Poisson. Questo vuol dire che
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i} = \vec{\omega}' \wedge \vec{i} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} & \Longrightarrow & \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{i} = 0 & \Longrightarrow & \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \parallel \vec{i} \\ \frac{d}{dt}\vec{j} = \vec{\omega}' \wedge \vec{j} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} & \Longrightarrow & \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{j} = 0 & \Longrightarrow & \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \parallel \vec{j} \\ \frac{d}{dt}\vec{k} = \vec{\omega}' \wedge \vec{k} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} & \Longrightarrow & \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{k} = 0 & \Longrightarrow & \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \parallel \vec{k} \end{cases}. \tag{20}$$
Poichè il vettore $\vec{\omega}' - \vec{\omega}$ risulta essere parallelo a tutti e tre i versori $\Longrightarrow \vec{\omega}' - \vec{\omega} = \vec{0}$, infatti il vettore nullo è l'unico che può essere contemporaneamente parallelo a tutti e tre i versori.

3. Indipendenza dalla terna solidale prescelta. Premettiamo un Lemma

Lemma Sia P un punto solidale al C.R., allora

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A})\,. \tag{21}$$

Dim.del Lemma Consideriamo $\mathbf{P} - \mathbf{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ con (x, y, x) costanti

$$\mathbf{P} - \mathbf{A} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{A}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{22}$$

e derivo rispetto al tempo t

$$\vec{v}_P - \vec{v}_A = x\frac{d}{dt}\vec{i} + y\frac{d}{dt}\vec{j} + z\frac{d}{dt}\vec{k} = x\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}\right) + y\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}\right) + z\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}\right)$$

$$= \left(\vec{\omega} \wedge x\vec{i}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge y\vec{j}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge z\vec{k}\right) = \vec{\omega} \wedge \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A})\,. \qquad C.V.D. \tag{23}$$

L'equazione 21 può essere messa nella forma

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} - \mathbf{A}) = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A})\,. \tag{24}$$

Scegliamo una seconda terna con origine in A di versori $\vec{i}', \vec{j}'$ e $\vec{k}'$ e chiamiamo $\vec{\omega}'$ il vettore che verifica le formule di Poisson

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i}' = \vec{\omega}' \wedge \vec{i}' \\ \frac{d}{dt}\vec{j}' = \vec{\omega}' \wedge \vec{j}' \\ \frac{d}{dt}\vec{k}' = \vec{\omega}' \wedge \vec{k}' \end{cases}. \tag{25}$$

Considero P solidale al C.R. tale che $\mathbf{P} - \mathbf{A} = \vec{i}'$; grazie al Lemma

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} - \mathbf{A}) = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A}) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\vec{i}'\right) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{i}'\right), \tag{26}$$

ma poichè valgono le Eq.(25)

$$\frac{d}{dt}\vec{i}' = \vec{\omega}' \wedge \vec{i}'. \tag{27}$$

Quindi

$$\vec{\omega}' \wedge \vec{i}' = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\omega}' \wedge \vec{i}' - \left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}'\right) = \left(\vec{\omega} - \vec{\omega}'\right) \wedge \vec{i}' = \vec{0}. \tag{28}$$

Adesso sia P il punto sull'asse y' che dista 1 da A tale che $\mathbf{P} - \mathbf{A} = \vec{j}'$. Dal Lemma abbiamo che

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} - \mathbf{A}) = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A}) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\vec{j}'\right) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{j}'\right), \tag{29}$$

ma poichè valgono le Eq.(25)

$$\frac{d}{dt}\vec{j}' = \vec{\omega}' \wedge \vec{j}'. \tag{30}$$

Quindi

$$\vec{\omega}' \wedge \vec{j}' = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\omega}' \wedge \vec{j}' - \left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}'\right) = \left(\vec{\omega} - \vec{\omega}'\right) \wedge \vec{j}' = \vec{0}. \quad (31)$$

Ancora una volta possiamo dire

$$\begin{cases} \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{i}' = 0 & \Longrightarrow \quad \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \parallel \vec{i}' \\ \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{j}' = 0 & \Longrightarrow \quad \left(\vec{\omega}' - \vec{\omega}\right) \parallel \vec{j}' \end{cases} \quad (32)$$

$\Longrightarrow \qquad \vec{\omega}' - \vec{\omega} = \vec{0}$ e $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$.

Osservazione Cambiando punto da A a B, $\vec{\omega}$ non cambia. Il vettore velocità angolare non dipende dall'origine della terna solidale

$$\begin{array}{c} \vec{\omega}' = \vec{\omega} \\ \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B \end{array}. \quad (33)$$

Prendendo infatti in B assi paralleli ai corrispondenti assi in A, l'espressione di $\vec{\omega}$ legata ai versori degli assi che sono gli stessi per le due terne è la stessa. Studiamo le conseguenze del teorema di Poisson nel caso piano. Riconsideriamo la fig.2. In questo esempio

$$\vec{k} = \vec{K} \text{ (versori } \perp \text{ al piano)} \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dt}\vec{k} = \vec{0}. \quad (34)$$

Richiamiamo l'Eq.(5)

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta \vec{I} + \sin\theta \vec{J} \\ \vec{j} = -\sin\theta \vec{I} + \cos\theta \vec{J} \end{cases}. \quad (35)$$

Calcoliamo le derivate rispetto al tempo t

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i} = -\sin\theta\dot{\theta}\vec{I} + \cos\theta\dot{\theta}\vec{J} \\ \frac{d}{dt}\vec{j} = -\cos\theta\dot{\theta}\vec{I} - \sin\theta\dot{\theta}\vec{J} \end{cases} \quad (36)$$

e

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d}{dt}\vec{i} \times \vec{j}\right)\vec{k} = \left(\sin^2\theta\dot{\theta} + \cos^2\theta\dot{\theta}\right)\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}. \quad (37)$$

Conseguenza (del Lemma) del Teorema di Poisson è che esiste uno e un solo vettore $\vec{\omega}$ tale che

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A}). \quad (38)$$

Se cambiamo punto solidale sostitutendo A con B, otteniamo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{B}). \quad (39)$$

Questa legge lega la velocità di due punti qualsiasi solidali al C.R. Se consideriamo il caso particolare $\vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A \qquad \forall \mathbf{P}, \mathbf{A} \in C.R. \quad (40)$$

Si dice che l'atto di moto è traslatorio. Invece, se esiste un punto A solidale con il C.R. con velocità nulla

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A}), \quad (41)$$

si dice che l'atto di moto è rotatorio.

Invarianti Cinematici

Se un corpo ha in ogni istante un atto di moto rototraslatorio, il suo moto è rigido.

Dim. Siano P e $Q \in C.R.$ qualsiasi. Calcoliamo

$$\frac{d\,|\mathbf{P}-\mathbf{Q}|^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\times(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\right] = \frac{d}{dt}\left[(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\right]\times(\mathbf{P}-\mathbf{Q})+(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\times\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\right]$$

$$= 2\frac{d}{dt}\left[(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\right]\times(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\,. \tag{42}$$

Ma $\mathbf{P}-\mathbf{Q} = (\mathbf{P}-\mathbf{O})-(\mathbf{Q}-\mathbf{O})$ con $\mathbf{O}$ punto fisso e la precedente formula diventa

$$= 2\,(\vec{v}_P-\vec{v}_Q)\times(\mathbf{P}-\mathbf{Q}) = 2\,[\vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{Q})]\times(\mathbf{P}-\mathbf{Q}) = \vec{0} \tag{43}$$

e quindi $|\mathbf{P}-\mathbf{Q}| =$ costante.

1. Sia $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ e consideriamo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\,, \tag{44}$$

moltiplichiamo scalarmente per $\vec{\omega}$

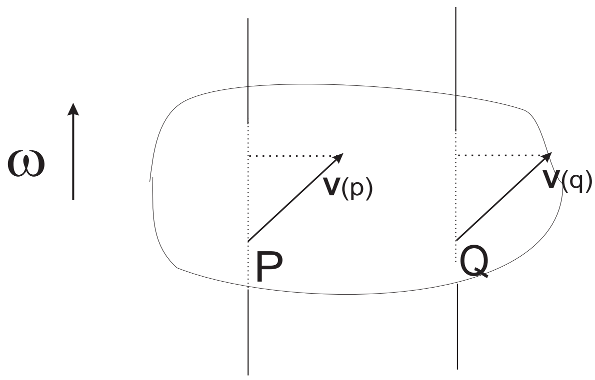
$$\vec{v}_P\times\vec{\omega} = [\vec{v}_Q+\vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{Q})]\times\vec{\omega} = \vec{v}_Q\times\vec{\omega} + \underbrace{[\vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{Q})]\times\vec{\omega}}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{v}_P\times\vec{\omega} = \vec{v}_Q\times\vec{\omega} \qquad \forall \mathbf{P},\mathbf{Q}\in C.R. \tag{45}$$

La quantità

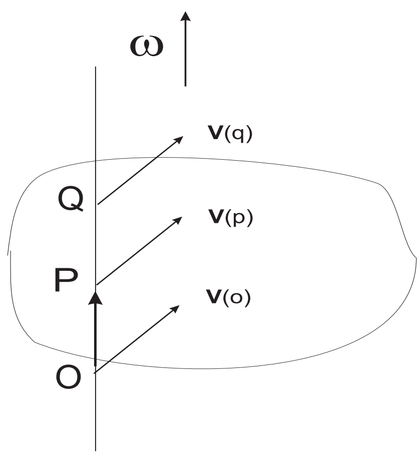
$$I = \vec{v}_P\times\vec{\omega} \tag{46}$$

si chiama invariante scalare cinematico



secondo il vettore $\vec{\omega}$
hanno uguale componente

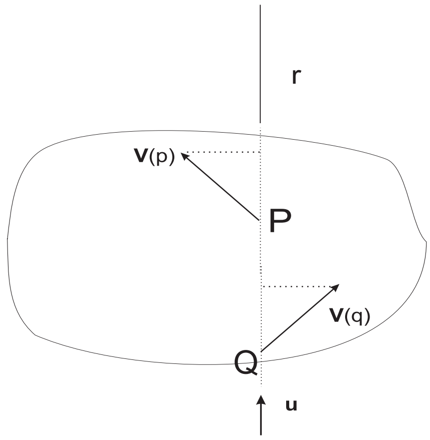
2. Punti che stanno su una stessa retta parallela ad $\vec{\omega}$ hanno uguale velocità. Infatti sia $\vec{r} \parallel \vec{\omega}$ e sia $\vec{u}$ il versore di $\vec{\omega}$, allora



$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{Q}) = \alpha\vec{u} \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} \wedge (\alpha \vec{u}) = 0 \qquad \text{perchè paralleli} \qquad \Longrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_Q. \tag{47}$$

3. Sono uguali le componenti delle velocità di due punti qualsiasi del C.R. secondo la retta che li congiunge. Se la velocità fosse diversa i 2 punti varierebbero la loro distanza. Quindi il moto non sarebbe più rigido.



Infatti da

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}),$$

moltiplichiamo scalarmente per $\vec{u}$

$$\vec{v}_P \times \vec{u} = \vec{v}_Q \times \vec{u} + [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})] \times \vec{u} = \vec{v}_Q \times \vec{u}, \tag{48}$$

dove abbiamo usato il parallelismo tra $(\mathbf{P} - \mathbf{Q})$ e $\vec{u}$. Se in un certo istante esiste un punto $\mathbf{Q}$ solidale al C.R. con velocità nulla, allora si può ridurre l'atto di moto rototraslatorio a <u>atto di moto rotatorio attorno a $\mathbf{Q}$</u>.

$$\forall P \in C.R. \qquad \vec{v}_P = \cancel{\vec{v}_Q} + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}). \tag{49}$$

Se esiste $\mathbf{Q}$ tale che $\vec{v}_Q = 0$ allora esiste una retta di punti solidali al C.R. con velocità nulla.

<u>Problema</u>
Come facciamo a riconoscere l'atto di moto rotatorio? Cerchiamo $\mathbf{Q}$ tale che $\vec{v}_Q = 0$. Preso $\mathbf{A}$ solidale prefissato,

$$0 = \vec{v}_Q = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{A}) \qquad \Longrightarrow \qquad -\vec{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{A}) = \vec{v}_A. \tag{50}$$

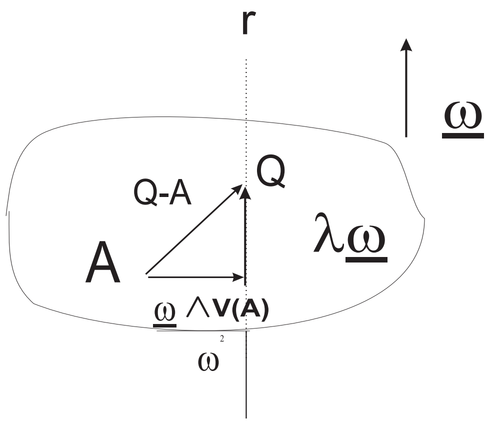
L'equazione vettoriale è stata già studiata e le sue soluzioni sono:

a) Se $\vec{v}_A = 0 \qquad \Longrightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{A}$.

b) Se $\vec{v}_A \neq 0$, C.N.S. per l'esistenza è che $\vec{\omega} \times \vec{v}_A = 0$. Questo vuol dire che l'invariante cinematico deve annullarsi. La soluzione generale dell'equazione vettoriale è:

$$\mathbf{Q} - \mathbf{A} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}. \tag{51}$$

La soluzione è formata da tutti i punti che stanno su una retta parallela ad $\vec{\omega}$



Se l'invariante cinematico $I \neq 0$, non esiste alcun punto solidale al C.R. con velocità nulla. Tuttavia esiste la retta $\mathbf{Q} - \mathbf{A}$ definita nella precedente equazione, la quale ha la particolarità di avere i punti che hanno velocità parallela ad $\vec{\omega}$.

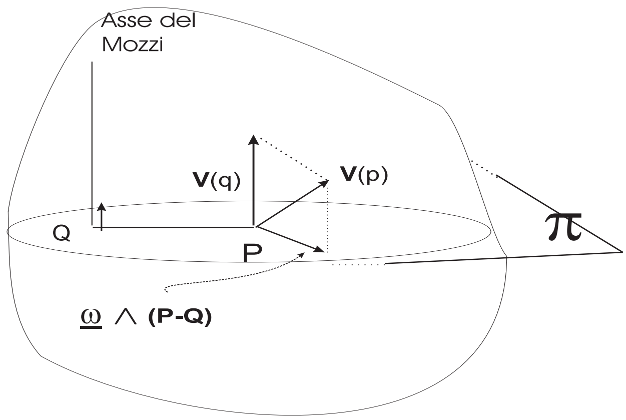
<u>Dim.</u> Dall'equazione $\vec{v}_Q = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{A})$; $\vec{v}_Q \parallel \vec{\omega} \Longleftrightarrow \vec{v}_Q \wedge \vec{\omega} = 0$

$$\vec{v}_Q \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} + [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{A})] \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} + \omega^2 (\mathbf{Q} - \mathbf{A}) - [(\mathbf{Q} - \mathbf{A}) \times \vec{\omega}]\, \vec{\omega}$$

$$= \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} + \omega^2 \left(\frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega} \right) - \left[\left(\frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega} \right) \times \vec{\omega} \right] \vec{\omega}$$

$$= \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + \lambda \omega^2 \vec{\omega} - \left[\lambda \omega^2 \right] \vec{\omega} = \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A = 0. \qquad (52)$$

I punti $\mathbf{Q} \in r$ hanno velocità parallela a $\vec{\omega}$. Sono i punti del C.R. che hanno la minore velocità.



$$I \neq 0 \qquad \vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{v}_Q$$
$$\vec{v}_Q \neq 0 \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$$
$$\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \perp \vec{v}_Q$$

$$|\vec{v}_P|^2 = |\vec{v}_Q|^2 + |\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})|^2 \qquad (53)$$

<u>Osservazione</u> Se $\vec{\omega} \neq 0$ e $I = 0$, tutti i punti hanno velocità perpendicolare a $\vec{\omega}$. In questo caso, l'asse del Mozzi, che in generale è costituito da punti con velocità parallela ad $\vec{\omega}$, sarà costituito da punti a velocità nulla, ovvero: se $I = 0$ e $\vec{\omega} \neq 0$

$\Longrightarrow$ l'atto di moto è rotatorio (Asse del Mozzi $\equiv$ Asse di Istantanea Rotazione).

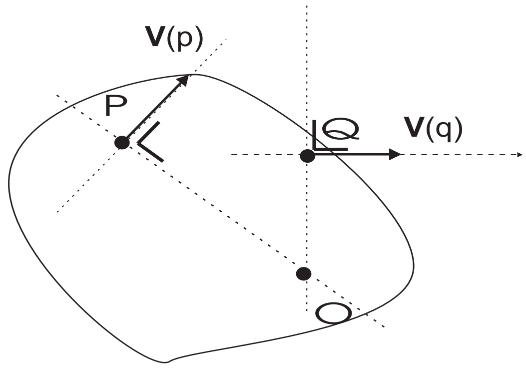
Viceversa, se l'atto di moto è rotatorio $\Longrightarrow I = 0$. Infatti, esisterà un punto C tale che $\vec{v}_C = 0$

$$\Longrightarrow I = \vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{v}_C \times \vec{\omega} = 0. \tag{54}$$

Inoltre, l'asse d'istantanea rotazione (passante per C e parallelo a $\vec{\omega}$) coincide con l'asse del Mozzi. Quindi per vedere se l'atto di moto con $\vec{\omega} \neq 0$ è riducibile ad un atto di moto rotatorio, basta vedere se $I = 0$. Cosa succede nel piano. Sia $\vec{\omega} \neq 0$, $\vec{\omega}$ nel caso piano è normale al piano del moto ($\vec{\omega} \perp \pi$) . Consideriamo l'invariante cinematico $I = \vec{v}_P \times \vec{\omega}$. Poichè il moto è piano, $\vec{v}_P$ è un vettore parallelo al piano (piano direttore) $\Longrightarrow I = \vec{v}_P \times \vec{\omega} = 0$ ($\vec{v}_P \perp \vec{\omega}$). Dalla precedente dimostrazione, possiamo dire che esiste un punto $C \in \pi$ con $\vec{v}_C = 0$. C è detto centro d'istantanea rotazione. Se $\vec{\omega} \neq 0$ un moto rigido piano è in ogni istante rotatorio

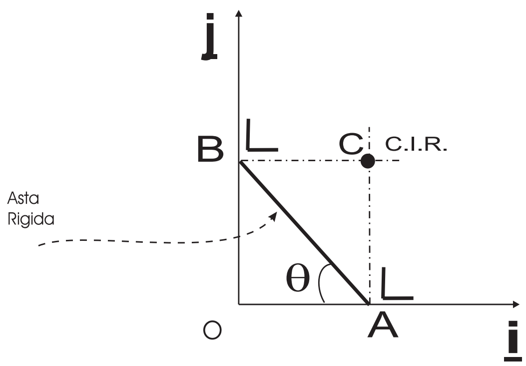
$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{C}) \\ |\vec{v}_P| = |\vec{\omega}|\,|\mathbf{P} - \mathbf{C}| \end{cases} \text{e } \vec{v}_P \perp \mathbf{P} - \mathbf{C} \tag{55}$$

Teorema di Chasles
Dato un moto rigido piano, sia $\vec{\omega} \neq 0$. Note le direzioni della velocità di due punti solidali al C.R., P e Q, in un istante il centro d'istantanea rotazione si trova sulle rette perpendicolari a tali direzioni nei punti



O è il centro d'istantanea rotazione

Esempio: Asta rigida



Consideriamo l'asta di lunghezza l nel piano (x, y). Calcoliamo la velocità $\vec{v}_A$ e prendiamo $\vec{k}$ come versore uscente. Allora $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$ (il vettore $\vec{\omega}$ è entrante nel piano) e

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{C}) = -\dot{\theta}\vec{k} \wedge (-l \sin\theta)\,\vec{J} = -\dot{\theta} l \sin\theta \vec{I} \tag{56}$$

oppure

$$\left.\begin{aligned} x_A &= l\cos\theta \\ \mathbf{A}-\mathbf{O} &= l\cos\theta\vec{I} \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}_A = -l\dot{\theta}\sin\theta\vec{I}. \tag{57}$$

Accelerazioni dei punti di un C.R.

Siano P ed A due punti solidali con il C.R. Scriviamo la formula della velocità per i due punti

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{A}) \tag{58}$$

e deriviamo rispetto al tempo t

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_A + \overrightarrow{\dot{\omega}}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{A}) + \vec{\omega}\wedge(\vec{v}_P-\vec{v}_A) \\ &= \vec{a}_A + \overrightarrow{\dot{\omega}}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{A}) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{A})]\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Cinematica Relativa (Teorema di Galilei o legge di composizione delle velocità)

Velocità

Sia O un osservatore fisso, O' un osservatore mobile e P in moto relativo rispetto ad entrambi gli osservatori. Costruiamo il vettore posizione

$$\mathbf{P}-\mathbf{O} = (\mathbf{P}-\mathbf{O}') + (\mathbf{O}'-\mathbf{O}) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} + (\mathbf{O}'-\mathbf{O})\,. \tag{60}$$

Derivo rispetto al tempo t ambo i membri

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{assoluta} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d}{dt}\vec{i} + y\frac{d}{dt}\vec{j} + z\frac{d}{dt}\vec{k} + \vec{v}_{O'}.$$

La quantità

$$\vec{v}_{P,rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \tag{61}$$

rappresenta la velocità relativa del punto rispetto all'osservatore mobile. Segue che

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{assoluta} = \vec{v}_{P,rel} + x\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}\right) + y\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}\right) + z\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}\right) + \vec{v}_{O'}$$

$$\begin{aligned} &= \vec{v}_{P,rel} + \left(\vec{\omega}\wedge x\vec{i}\right) + \left(\vec{\omega}\wedge y\vec{j}\right) + \left(\vec{\omega}\wedge z\vec{k}\right) + \vec{v}_{O'} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{\omega}\wedge\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right) + \vec{v}_{O'} \\ &= \vec{v}_{P,rel} + \left[\vec{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{O}') + \vec{v}_{O'}\right]. \end{aligned} \tag{62}$$

$\vec{\omega}$ rappresenta la velocità angolare della terna mobile rispetto a quella fissa. Il termine tra parentesi quadre rappresenta la velocità di trascinamento di P, cioè la velocità di P come se fosse solidale con la terna mobile. In sisntesi scriviamo

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{assoluta} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,trasc} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_S. \tag{63}$$

Accelerazione di Coriolis

Dall'Eq.(63), deriviamo rispetto al tempo t per ricavare le accelerazioni

$$\underbrace{\vec{a}_P}_{assoluta} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{P,rel} + \frac{d}{dt}\vec{v}_S, \tag{64}$$

ma $\vec{v}_{P,rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, quindi

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{P,rel} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\frac{d}{dt}\vec{i} + \dot{y}\frac{d}{dt}\vec{j} + \dot{z}\frac{d}{dt}\vec{k}. \tag{65}$$

Il termine $\vec{a}_{P,rel} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ rappresenta l'accelerazione relativa e l'Eq.(65) si può scrivere

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{P,rel} = \vec{a}_{P,rel} + \dot{x}\frac{d}{dt}\vec{i} + \dot{y}\frac{d}{dt}\vec{j} + \dot{z}\frac{d}{dt}\vec{k}$$

$$= \vec{a}_{P,rel} + \dot{x}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}\right) + \dot{y}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}\right) + \dot{z}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}\right) = \vec{a}_{P,rel} + \left(\vec{\omega} \wedge \dot{x}\vec{i}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \dot{y}\vec{j}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \dot{z}\vec{k}\right)$$

$$= \vec{a}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right) = \vec{a}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel}. \tag{66}$$

Calcoliamo la derivata rispetto al tempo t della velocità di trascinamento

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_S = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{v}_{O'}\right]$$

$$\vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}\left[\mathbf{P} - \mathbf{O}'\right]$$

$$= \vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}\left[x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\right]$$

$$= \vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \left[\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}\right) + y\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}\right) + z\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}\right)\right]$$

$$= \vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \left[\left(\vec{\omega} \wedge x\vec{i}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge y\vec{j}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge z\vec{k}\right)\right]$$

$$= \vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \left[\left(\vec{\omega} \wedge x\vec{i}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge y\vec{j}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge z\vec{k}\right)\right]$$

$$= \vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\right]$$

$$= \vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}')\right]. \tag{67}$$

Il termine

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{O'} + \overrightarrow{\dot{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}')\right], \tag{68}$$

viene chiamato accelerazione di trascinamento e corrisponde all'accelerazione del punto P come se questo fosse rigidamente collegato alla terna mobile. Quindi

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_S = \vec{a}_S + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} \tag{69}$$

e, in totale

$$\underbrace{\vec{a}_P}_{assoluta} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} + \vec{a}_S + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_S + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel}. \tag{70}$$

Il termine

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} \tag{71}$$

si chiama accelerazione di Coriolis

Legge di composizione delle velocità angolari
Denotiamo con

$$\begin{array}{c} \vec{\omega}_{ass}, \text{ la velocità angolare vista dall'osservatore fisso} \\ \vec{\omega}_{rel}, \text{ la velocità angolare vista dall'osservatore mobile} \\ \vec{\Omega}\,, \text{ la velocità angolare della terna mobile rispetto a quella fissa} \end{array} \quad . \tag{72}$$

Segue che presi due punti P e $Q \in C.R.$, l'osservatore fisso vede

$$\vec{v}_{P,ass.} = \vec{v}_{Q,ass.} + \vec{\omega}_{ass} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,, \tag{73}$$

l'osservatore mobile vede

$$\vec{v}_{P,rel.} = \vec{v}_{Q,rel.} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,. \tag{74}$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze si ottiene:

$$\vec{v}_{P,ass.} - \vec{v}_{P,rel.} = \vec{v}_{Q,ass.} - \vec{v}_{Q,rel.} + \vec{\omega}_{ass} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) + \vec{\omega}_{rel} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$$

$$\vec{v}_{P,ass.} - \vec{v}_{P,rel.} = \vec{v}_{Q,ass.} - \vec{v}_{Q,rel.} + \vec{\omega}_{ass} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) + \vec{\omega}_{rel} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,. \tag{75}$$

Dall'Eq.(63) si ricava

$$\vec{v}_{P,rel.} + \vec{v}_{P,S} - \vec{v}_{P,rel.} = \vec{v}_{Q,rel.} + \vec{v}_{Q,S} - \vec{v}_{Q,rel.} + (\vec{\omega}_{ass} - \vec{\omega}_{rel}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{v}_{P,S} = \vec{v}_{Q,S} + (\vec{\omega}_{ass} - \vec{\omega}_{rel}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,. \tag{76}$$

La velocità di trascinamento può essere trasformata tenendo conto del vettore $\vec{\Omega}$. Questo ci conduce a

$$\begin{cases} \vec{v}_{P,S} = \vec{v}_{A,ass.} + \vec{\Omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A}) \\ \vec{v}_{Q,S} = \vec{v}_{A,ass.} + \vec{\Omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{A}) \end{cases}, \tag{77}$$

dove $\mathbf{A}$ è l'origine della terna mobile. Sostituendo nell'Eq.(76), si ottiene

$$\vec{v}_{A,ass.} + \vec{\Omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A}) = \vec{v}_{A,ass.} + \vec{\Omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{A}) + (\vec{\omega}_{ass} - \vec{\omega}_{rel}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,. \tag{78}$$

Raccogliendo $\vec{\Omega}$ a primo membro, possiamo scrivere

$$\vec{\Omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = (\vec{\omega}_{ass} - \vec{\omega}_{rel}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,. \qquad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \text{ solidali col } C.R. \tag{79}$$

Portando tutto a primo membro si ottiene

$$\left(\vec{\Omega} - \vec{\omega}_{ass} + \vec{\omega}_{rel}\right) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\Omega} - \vec{\omega}_{ass} + \vec{\omega}_{rel} \parallel \mathbf{P} - \mathbf{Q} \qquad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{\Omega} - \vec{\omega}_{ass} + \vec{\omega}_{rel} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\omega}_{ass} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_{rel}. \tag{80}$$

$\vec{\omega}_{ass}$ è la somma della velocità angolare vista dall'osservatore mobile e dalla velocità angolare di trascinamento della terna mobile. La relazione nell'Eq.(80) traduce la legge di composizione delle velocità angolari.