LEZIONE 2 e 3

La teoria della selezione di portafoglio di Markowitz

Premessa

Premessa (1)

È piuttosto frequente osservare come gli investitori tendano a **non concentrare** la loro ricchezza su un solo titolo, preferendo detenere portafogli composti da più titoli

… (segue): premessa (2)

Tale comportamento risponde alla prescrizione dettata dal buon senso secondo la quale non sarebbe conveniente ***"riporre tutte le uova in un paniere"***

… (segue): premessa (3)

Quanto precede suggerisce l'opportunità di far luogo all'analisi del rendimento e del rischio associati a portafogli di attività finanziarie

… (segue): premessa (4)

In tale ambito si farà particolare riferimento ai precetti teorici proposti da Harry Markowitz nell'articolo "Portfolio Selection" pubblicato sul "Journal of Finance" nel 1952[1]

[1] 38 anni dopo la pubblicazione dell'articolo l'autore condivise con William F. Sharpe e Merton H. Miller il premio Nobel per l'economia

Il modello di Markowitz nel caso elementare che preveda la presenza di due soli titoli in portafoglio

Il modello di Markowitz: due soli titoli (1)

Il modello sviluppato da Markowitz si fonda sulle seguenti ipotesi:

1. gli investitori selezionano i portafogli sulla base del **rendimento medio atteso** e del **rischio atteso**
2. l'orizzonte temporale è **uniperiodale**
3. gli investitori sono **avversi al rischio**

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (2)

Dalla prima e dalla terza ipotesi discende il principio della

$\Downarrow$

MEDIA VARIANZA[1]

Esso sancisce che tra due strategie d'investimento è preferibile quella che presenta maggior rendimento atteso e minor deviazione standard

1 la ragione per cui il principio è noto come "principio media – varianza" e non come "principio media – deviazione standard" deriva dal solo dal fatto che Markowitz, nel suo articolo originario del 1952, preferì utilizzare come misura di rischio la varianza

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (3)

In simboli:

se

$$E(r_x) \geq E(r_y)$$

e

$$\sigma_x \leq \sigma_y$$

con almeno una disuguaglianza forte

allora

il portafoglio X **domina** il portafoglio Y

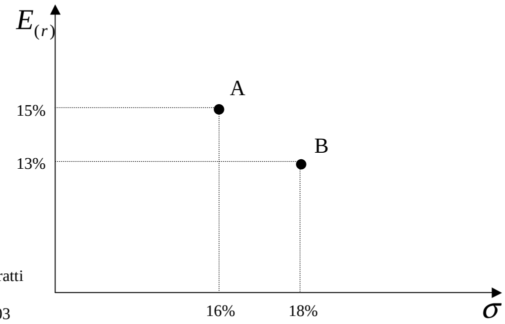
… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (4)

Alcuni esempi numerici contribuiranno a chiarire quanto appena affermato[1]:

Esempio 1

Portafoglio A: $E(r_A)$ = 15% σ_A = 16%

Portafoglio B: $E(r_B)$ = 13% σ_B = 18%



[1] tutti gli esempi qui riprodotti sono tratti da P. L. Fabrizi "L'economia del mercato mobiliare", Milano, 2003

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (5)

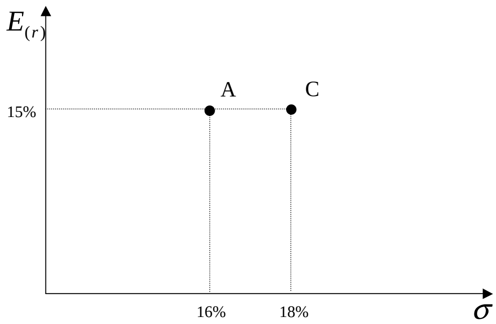
Sulla base del principio media – varianza si può affermare che, poiché il portafoglio A presenta rendimento atteso superiore e rischio inferiore al portafoglio B, **il portafoglio A "domina" il portafoglio B**

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (6)

Esempio 2

Portafoglio A: $E(r_A)$ = 15% σ_A = 16%

Portafoglio C: $E(r_C)$ = 15% σ_C = 18%



… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (7)

Il principio media – varianza permette di affermare che **il portafoglio A "domina" anche il portafoglio C**

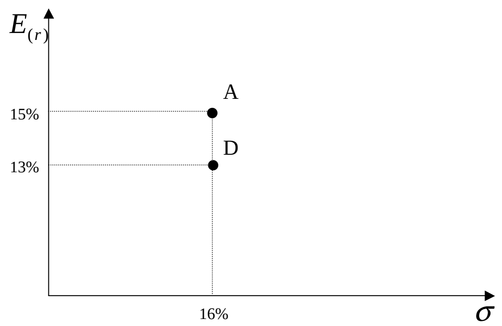
Professor Tullio Fumagalli
Corso di Finanza Aziendale
Università degli Studi di Bergamo

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (8)

Esempio 3

Portafoglio A: $E(r_A)$ = 15% σ_A = 16%

Portafoglio D: $E(r_D)$ = 13% σ_D = 16%



… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (9)

Il principio media – varianza permette di affermare che **il portafoglio A "domina" anche il portafoglio D**

Professor Tullio Fumagalli
Corso di Finanza Aziendale
Università degli Studi di Bergamo

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (10)

Il principio della media – varianza non offre criteri di selezione delle opportunità di investimento quando

$$E(r_x) > E(r_y)$$

essendo

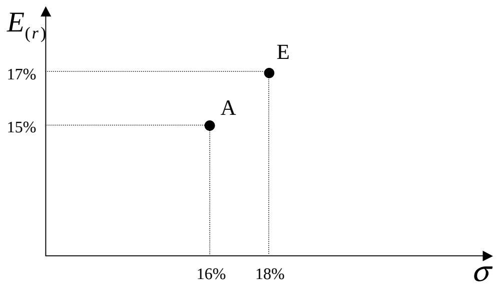
$$\sigma_x > \sigma_y$$

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (11)

Si veda il seguente esempio:

Portafoglio A: $E(r_A)$ = 15% σ_A = 16%

Portafoglio E: $E(r_E)$ = 17% σ_E = 18%



… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (12)

Nell’esempio precedente l’ipotesi di avversione al rischio e il principio media – varianza non permettono di indentificare un portafoglio efficiente e uno dominato, in quanto il **portafoglio più rischioso** è anche caratterizzato da un **maggior livello di rendimento atteso**

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (13)

La scelta tra il portafoglio A e il portafoglio E non è quindi estrapolabile dalle ipotesi alla base del modello di Markowitz

$\Downarrow$

la scelta dell’una ovvero dell’altra opportunità d’investimento discenderà dal **grado di propensione al rischio** dell’investitore

… (segue): il modello di Markowitz: due soli titoli (14)

Allo scopo di procedere nell'analisi della teoria di portafoglio è necessario approfondire il tema della stima del rendimento e del rischio di portafoglio

La quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio in presenza di due soli titoli

La quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (1)

La stima del rendimento atteso di un portafoglio non prospetta **difficoltà** particolari

Noti i rendimenti attesi $(E(r_i))$ e i pesi (X_i) assunti dai titoli in portafoglio, il rendimento del portafoglio $(E(r_p))$ è pari alla media ponderata dei rendimenti attesi dei singoli titoli

Analiticamente:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} [X_i \times E(r_i)] \qquad (1)$$

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (2)

Esempio

Si assuma che l'investitore detenga 5 titoli i cui rendimenti e i pesi percentuali in portafoglio siano quelli riportati alla seguente tabella:

Titolo	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
$E(r_i)$	10%	2%	15%	4%	11%
X_i	25%	10%	30%	20%	15%

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (3)

Esempio

Il rendimento può essere facilmente calcolato applicando la (1):

Avremo

$$E(r_p) = (10\% \times 25\%) + (2\% \times 10\%) + (15\% \times 30\%) + (4\% \times 20\%) + (11\% \times 15\%)$$

$$E(r_p) = 9{,}65\%$$

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (4)

Problemi più complessi prospetta la stima del
rischio di portafoglio

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (5)

Invero esso non può essere calcolato quale semplice media ponderata dei rischi associati ai titoli componenti il portafoglio

Una siffatta misura, come meglio si avrà modo di vedere in seguito, trascurerebbe **l'effetto diversificazione**

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (6)

Un semplice **esempio** chiarirà meglio quanto si va affermando

In un singolo anno i titoli **ENI** e **TIM** hanno riportato i rendimenti mensili presenti nella tabella riportata di seguito:

	ENI	TIM
Gennaio	**-4,545%**	-4,720%
Febbraio	-1,563%	-0,611%
Marzo	**12,703%**	3,504%
Aprile	3,925%	-7,910%
Maggio	-3,470%	-1,829%
Giugno	-3,394%	2,964%
Luglio	-2,371%	**-8,170%**
Agosto	1,312%	3,191%
Settembre	1,855%	5,566%
Ottobre	-4,364%	3,032%
Novembre	-1,958%	30,167%
Dicembre	-0,220%	**40,814%**

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (7)

Nota la formula di calcolo ex post dello scarto quadratico medio è semplice calcolare il rischio dei due titoli azionari esaminati:

$$\sigma_{ENI} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(r_i - \overline{r})^2}{n-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \frac{(r_i - \overline{r})^2}{11}} = 4{,}832\,\%$$

$$\sigma_{TIM} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(r_i - \overline{r})^2}{n-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \frac{(r_i - \overline{r})^2}{11}} = 14{,}892\,\%$$

n = numero di rendimenti mensili utilizzati per la stima della deviazione standard

r_i = rendimento dell'i-esimo mese

$\overline{r}$ = rendimento medio mensile = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$

29

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (8)

Ipotizzando che i due titoli abbiano entrambi un **peso del 50%**, lo scarto quadratico medio calcolato come media artitmetica ponderata dei rischi dei singoli titoli sarebbe pari a:

$$\sigma_p = (50\% \times 4{,}832\,\%) + (50\% \times 14{,}892\,\%) = 9{,}862\,\%$$

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (9)

Per dimostrare che la **deviazione standard** dei rendimenti mensili del portafoglio in esame **non è pari** alla misura ottenuta applicando la formula della **media ponderata** identifichiamo i rendimenti che si sarebbero ottenuti detenendo in ogni mese dell'anno un **portafoglio equipartito** tra i titoli ENI e TIM

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (10)

Sapendo che il **rendimento di un portafoglio** è la media ponderata dei rendimenti attesi dei singoli titoli, ove i coefficienti di ponderazione sono rappresentati dai pesi assunti dai singoli titoli, tali rendimenti possono essere calcolati applicando la seguente formula:

$$r_{Portafoglio}^{mese\ (i)} = 50\% \times r_{ENI}^{mese\ (i)} + 50\% r_{TIM}^{mese\ (i)}$$

dove:

$r_{Portafoglio}^{mese\ (i)}$ = rendimento conseguito nel mese i dal portafoglio equiripartito composto da ENI e TIM

$r_{ENI}^{mese\ (i)}$ = rendimento conseguito nel mese i da ENI

$r_{TIM}^{mese\ (i)}$ = rendimento conseguito nel mese i da TIM

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (11)

I dodici **rendimenti mensili** che un investitore avrebbe ottenuto mantenendo un portafoglio equiripartito sono riportati alla seguente tabella:

	Rendimento mensile
Gennaio	(50%) x (-4,545%) + (50%) x (-4,720%) = -4,63%
Febbraio	(50%) x (-1,563%) + (50%) x (-0,611%) = -1,09%
Marzo	(50%) x (12,703%) + (50%) x (3,504%) = 8,10%
Aprile	(50%) x (3,925%) + (50%) x (-7,910%) = -1,99%
Maggio	(50%) x (-3,470%) + (50%) x (-1,829%) = -2,65%
Giugno	(50%) x (-3,394%) + (50%) x (2,964%) = -0,22%
Luglio	(50%) x (-2,371%) + (50%) x (-8,170%) = **-5,27%**
Agosto	(50%) x (1,312%) + (50%) x (3,191%) = 2,25%
Settembre	(50%) x (-1,855%) + (50%) x (5,566%) = 3,71%
Ottobre	(50%) x (-4,364%) + (50%) x (3,032%) = -0,67%
Novembre	(50%) x (-1,958%) + (50%) x (30,167%) = 14,10%
Dicembre	(50%) x (-0,220%) + (50%) x (40,814%) = **20,30%**

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (12)

La **deviazione standard** del portafoglio è pertanto la seguente:

$$\sigma_{Portafoglio} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(r_i - \overline{r})^2}{n-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \frac{(r_i - \overline{r})^2}{11}} = 7{,}817\%$$

Il rischio del portafoglio è dunque sensibilmente inferiore a quello **erroneamente** calcolato come media ponderata delle deviazioni standard associate ai due titoli

Invero la stima fondata sul ricorso alla media ponderata non coglie l’effetto diversificazione dato dalla non perfetta correlazione positiva dei rendimenti mensili dei due titoli in portafoglio

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (13)

L'esigenza di stimare il rischio di un portafoglio impone il richiamo dell'indicatore statistico noto come
coefficiente di correlazione lineare (ρ)

Esso consente infatti di cogliere in che modo varia il rendimento di un'attività finanziaria al variare del rendimento di un'altra

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (14)

Nel caso particolare di un **portafoglio di 2 titoli** la varianza e la deviazione standard sono rispettivamente individuate dalle seguenti:

$$\sigma_P^2 = (X_1 \times \sigma_1)^2 + (X_2 \times \sigma_2)^2 + 2 \times X_1 \times X_2 \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \rho_{1,2}$$

$$\sigma_P = \sqrt{(X_1 \times \sigma_1)^2 + (X_2 \times \sigma_2)^2 + 2 \times X_1 \times X_2 \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \rho_{1,2}}$$

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (15)

Ricordando che

$$\rho_{1,2} = \frac{Cov_{1,2}}{\sigma_1 \times \sigma_2}$$

le formule della varianza e della deviazione standard possono essere anche scritte come segue:

$$\sigma_P^2 = (X_1 \times \sigma_1)^2 + (X_2 \times \sigma_2)^2 + 2 \times X_1 \times X_2 \times Cov_{1,2}$$

$$\sigma_P = \sqrt{(X_1 \times \sigma_1)^2 + (X_2 \times \sigma_2)^2 + 2 \times X_1 \times X_2 \times Cov_{1,2}}$$

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (16)

Ricordando che

$$-1 \leq \rho_{1,2} \leq 1$$

Si riscontrano le seguenti proprietà:

- $\rho_{1,2} = +1$ $\Rightarrow$ le variabili sono **perfettamente e positivamente correlate**: non c'è **alcun beneficio di riduzione del rischio** $\Rightarrow$ lo scarto quadratico medio è pari alla media ponderata degli scarti quadratici medi dei due titoli
- $\rho_{1,2} < 1$: lo scarto quadratico medio del portafoglio è minore della media ponderata degli scarti quadratici medi dei singoli titoli $\Rightarrow$ **il beneficio** in termini di riduzione **cresce al decrescere** del coefficiente di correlazione
- $\rho_{1,2} = -1$: esprime il caso in cui è massimo il beneficio di riduzione del rischio

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (17)

Gli **esempi** che seguono chiariranno meglio la portata delle acquisizioni alle quali siamo pervenuti per via teorica

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (18)

Sia dato un portafoglio composto da due titoli, α e β, con le seguenti caratteristiche di rendimento e rischio attesi

Titolo	$E(r_i)$	σ_i
α	10%	12%
β	15%	14%

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (19)

Caso numero 1

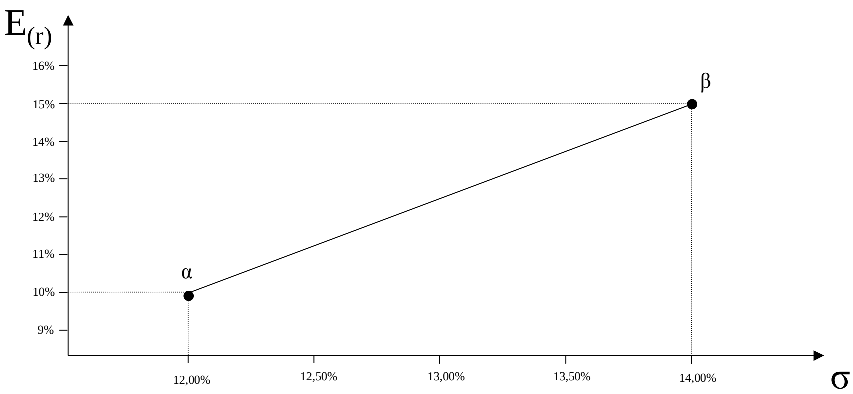
Per $\rho_{\alpha,\beta} = +1$ le combinazioni rischio – rendimento attesi del portafoglio sono le seguenti:

Peso % titolo α	Peso % titolo β	$E(R_{portafoglio})$	$\sigma_{portafoglio}$
100%	0,00%	10,00%	12,00%
87,50%	12,50%	10,63%	12,25%
75,00%	25,00%	11,25%	12,50%
62,50%	37,50%	11,88%	12,75%
50,00%	50,00%	12,50%	13,00%
37,50%	62,50%	13,13%	13,25%
25,00%	75,00%	13,75%	13,50%
12,50%	87,50%	14,38%	13,75%
0,00%	100,00%	15,00%	14,00%

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (20)

… (segue): caso numero 1

Le combinazioni rischio – rendimento assumono pertanto nel caso in esame la seguente configurazione:



… *(segue): caso numero 1*

Osservazioni

Nessun portafoglio appartenente alla linea dei possibili portafogli **domina o è dominato** da altre combinazioni dei medesimi titoli

⇓

tutti i portafogli appartenenti alla linea sono portafogli **efficienti**

L'insieme dei portafogli fattibili **coincide** con l'insieme dei portafogli efficienti

Caso numero 2

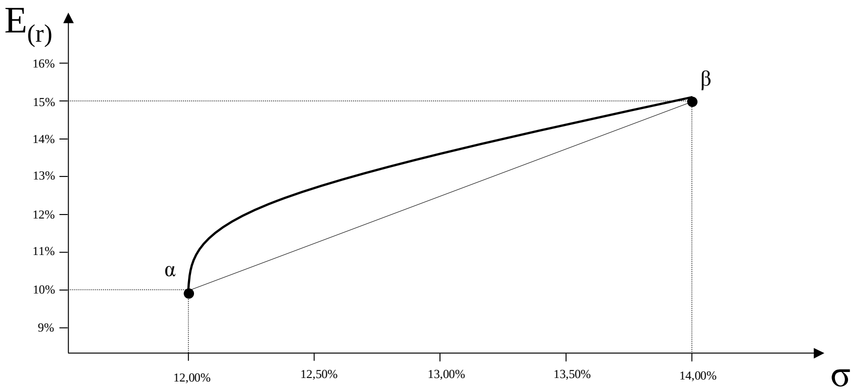
Per $\rho_{\alpha,\beta} = +0,9$ le combinazioni rischio – rendimento attesi del portafoglio sono le seguenti:

Peso % titolo α	Peso % titolo β	$E(R_{portafogli\ o})$	$\sigma_{portafogli\ o}$
100%	0,00%	10,00%	12,00%
87,50%	12,50%	10,63%	12,10%
75,00%	25,00%	11,25%	12,25%
62,50%	37,50%	11,88%	12,44%
50,00%	50,00%	12,50%	12,67%
37,50%	62,50%	13,13%	12,95%
25,00%	75,00%	13,75%	13,26%
12,50%	87,50%	14,38%	13,62%
0,00%	100,00%	15,00%	14,00%

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (23)

… (segue): caso numero 2

Le combinazioni rischio – rendimento assumono pertanto nel caso in esame la seguente configurazione:



… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (24)

… (segue): caso numero 2

Osservazioni

Quando il coefficiente di correlazione lineare (ρ) è inferiore a +1, allora la combinazione rischio – rendimento dei portafogli ottenuti come combinazione dei titoli α e β assume un andamento curvilineo **(iperbole)**

⇓

Cominciano ad essere manifesti i primi **effetti benevoli** della **diversificazione**

⇓

A parità di composizione del portafoglio, una riduzione della correlazione determina una riduzione della deviazione standard del portafoglio medesimo, senza però produrre effetti sul rendimento atteso

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (25)

Caso numero 3

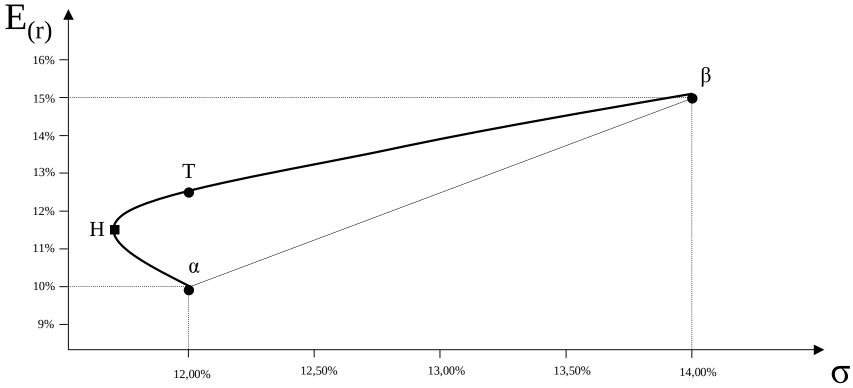
Per $\rho_{\alpha,\beta}$ = +0,7 le combinazioni rischio – rendimento attesi del portafoglio sono le seguenti:

Peso % titolo α	Peso % titolo β	$E(R_{portafoglio})$	$\sigma_{portafoglio}$
100%	0,00%	10,00%	12,00%
87,50%	12,50%	10,63%	11,79%
75,00%	25,00%	11,25%	11,72%
62,50%	37,50%	11,88%	11,79%
50,00%	50,00%	12,50%	11,99%
37,50%	62,50%	13,13%	12,33%
25,00%	75,00%	13,75%	12,78%
12,50%	87,50%	14,38%	13,34%
0,00%	100,00%	15,00%	14,00%

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (26)

… (segue): caso numero 3

Le combinazioni rischio – rendimento assumono pertanto nel caso in esame la seguente configurazione:



… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (27)

… (segue): caso numero 3

Osservazioni

Anche in questo caso le combinazioni rischio – rendimento dei portafogli ottenuti combinando i titoli α e β assume un **andamento curvilineo** (iperbole)

A differenza dei casi precedenti **non tutti i portafogli fattibili sono anche portafogli efficienti**

Il principio media – varianza permette di riconoscere alcuni portafogli dominati **(portafogli inefficienti)**

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (28)

… (segue): caso numero 3

… (segue): osservazioni

Riassumendo:

- **il tratto di curva αβ** rappresenta l’insieme dei portafogli fattibili
- **il tratto di curva αH** rappresenta l’insieme dei portafogli dominati
- **il tratto di curva Hβ** rappresenta l’insieme dei portafogli efficienti, denominato **frontiera efficiente**

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (29)

Caso numero 4

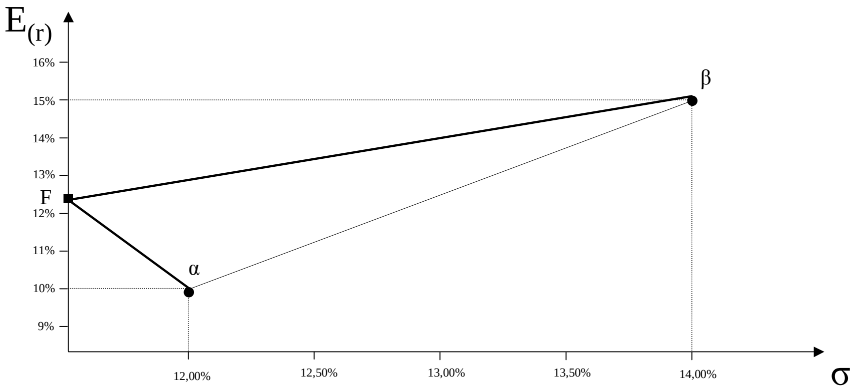
Per $\rho_{\alpha,\beta} = -1$ le combinazioni rischio – rendimento attesi del portafoglio sono le seguenti:

Peso % titolo α	Peso % titolo β	$E(R_{portafoglio})$	$\sigma_{portafoglio}$
100%	0,00%	10,00%	12,00%
87,50%	12,50%	10,63%	8,75%
75,00%	25,00%	11,25%	5,50%
62,50%	37,50%	11,88%	2,25%
50,00%	50,00%	12,50%	1,00%
37,50%	62,50%	13,13%	4,25%
25,00%	75,00%	13,75%	7,50%
12,50%	87,50%	14,38%	10,75%
0,00%	100,00%	15,00%	14,00%

… (segue): la quantificazione del rendimento e del rischio di portafoglio (30)

… (segue): caso numero 4

Le combinazioni rischio – rendimento assumono pertanto nel caso in esame la seguente configurazione:



… (segue): caso numero 4

Osservazioni

In tal caso **gli effetti della diversificazione sono massimi**

La combinazione rischio – rendimento dei portafogli ottenuti combinando i titoli α e β permette di ottenere un investimento (F) a **rischio nullo**

… (segue): caso numero 4

… (segue): osservazioni

Riassumendo:

- **il segmento αFβ** rappresenta l'insieme dei portafogli fattibili
- **il segmento αF** rappresenta l'insieme dei portafogli dominati
- **il segmento Fβ** rappresenta la frontiera efficiente

Esercizio riepilogativo

Calcolare:

1. **rendimento atteso**
2. **scarto quadratico medio atteso**
3. **covarianza (tra il titolo A e il titolo B e tra il titolo C e il titolo D)**

con riferimento alle seguenti attività finanziarie:

Tit. A	Tit. B	Scenario
2%	15%	5%
3%	13%	10%
5%	11%	15%
6%	9%	20%
7%	8%	25%
8%	6%	15%
10%	5%	7%
12%	2%	3%

Tit. C	Tit. D	Scenario
2%	1%	1%
3%	2%	3%
5%	3%	5%
7%	4%	7%
9%	5%	20%
12%	7%	40%
14%	9%	15%
16%	10%	6%
18%	12%	2%
20%	13%	1%

Si calcoli inoltre:

4. **il rischio associato al portafoglio ALFA così composto: 60% A e 40% B**
5. **il rischio associato al portafoglio BETA così composto: 15% C e 85% D**

Il modello di Markowitz nel caso generale di N titoli in portafoglio

Il modello di Markowitz: il caso generale (1)

Dall'analisi condotta su portafogli ottenuti come combinazione di **due soli titoli** si evince l'insegnamento fondamentale della teoria di selezione del portafoglio:

Combinando titoli rischiosi si produce un insieme di alternative di investimento (insieme dei **portafogli fattibili**); alcune di queste combinazioni appaiono **non efficienti** (secondo il criterio media – varianza), altre invece sono efficienti e costituiscono, nel loro insieme, la **frontiera efficiente**

Verrà introdotta a questo punto una **generalizzazione** dell'analisi condotta su 2 titoli, proponendo il caso di combinazioni di N titoli

… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (2)

Prima di affrontare il tema dell'indentificazione dei portafogli efficienti nel caso di N titoli, è necessario trattare il tema della **stima del rendimento atteso e del rischio atteso**

… **(segue): il modello di Markowitz: il caso generale (3)**

La **stima del rendimento atteso** di un portafoglio composto da N titoli non merita alcun approfondimento: verrà calcolato come semplice **media ponderata** dei rendimenti attesi dei singoli titoli

In termini analitici:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \times E(r_i)$$

… **(segue): il modello di Markowitz: il caso generale (4)**

Richiede invece maggior attenzione la stima della **deviazione standard**

Al fine di cogliere **l'effetto diversificazione complessivo**, è necessario stimare le correlazioni tra **ciascuna delle coppie** dei titoli in portafoglio

… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (5)

Ipotizzando di voler calcolare il rischio del portafoglio P composto dai titoli 1, 2 e 3, gli elementi necessari per procedere al calcolo di σ_p sono i seguenti:

- **la deviazione standard** dei rendimenti dei tre titoli (σ_1, σ_2, σ_3)
- **il peso** assunto in portafoglio dai tre titoli (X_1, X_2, X_3)
- **le correlazioni** tra i rendimenti delle tre coppie di titoli (ρ_1, ρ_2, ρ_3)

… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (6)

La formula della deviazione standard del portafoglio nel caso specifico di 3 titoli è la seguente:

$$\sigma_P = \sqrt{\begin{aligned}&(X_1 \times \sigma_1)^2 + (X_2 \times \sigma_2)^2 + (X_3 \times \sigma_3)^2 + 2 \times X_1 \times X_2 \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \rho_{1,2} + \\ &+ 2 \times X_1 \times X_3 \times \sigma_1 \times \sigma_3 \times \rho_{1,3} + 2 \times X_2 \times X_3 \times \sigma_2 \times \sigma_3 \times \rho_{2,3}\end{aligned}}$$

… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (7)

σ_p può essere alternativamente espresso come:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(X_i \times \sigma_i)^2 \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_i \times X_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{i,j}}$$

Dato che:

$$(X_1 \times \sigma_1)^2 = X_1 \times X_1 \times \sigma_1 \times \sigma_1 \times 1 = X_1 \times X_1 \times \sigma_1 \times \sigma_1 \times \rho_{1,1}$$

La formula precedente può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_i \times X_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{i,j}}$$

… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (8)

Ricordando che:

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov_{i,j}}{\sigma_i \times \sigma_j} \Rightarrow Cov_{i,j} = \rho_{i,j} \times \sigma_i \times \sigma_j$$

σ_p può essere alternativamente espresso come:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_i \times X_j \times Cov_{i,j}}$$

… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (9)

Data quest'ultima espressione,si ricava facilmente la formula per il calcolo del rischio di un portafoglio composto da **N titoli**:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i \times X_j \times Cov_{i,j}}$$

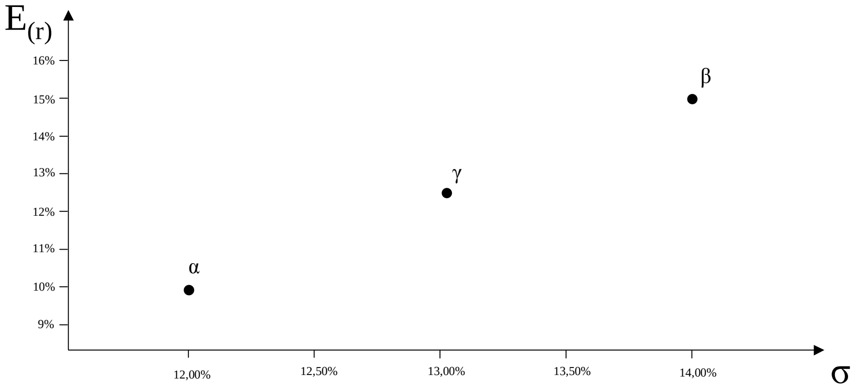
… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (10)

Effettuata la stima di $E(r_p)$ e σ_p, è ora necessario analizzare come dall'insieme delle possibili combinazioni dei titoli si estrapoli **l'insieme dei portafogli efficienti**

… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (11)

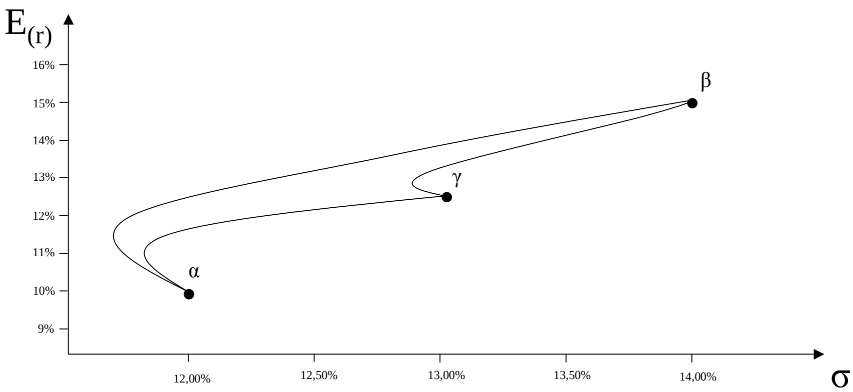
Si consideri il seguente esempio:

un investitore è chiamato ad indentificare la migliore strategia di investimento operando una scelta fra tre titoli: α, β e γ
Graficamente:



… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (12)

I portafogli fattibili ottenuti combinando **due soli titoli** sono di seguito rappresentanti:



… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (13)

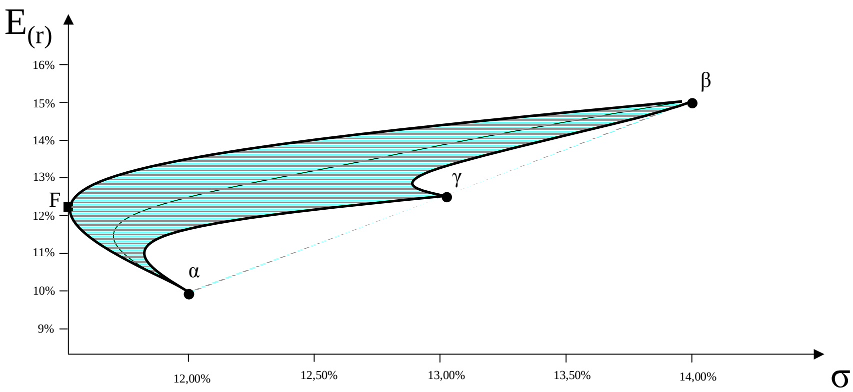
Dall'analisi grafica si evince che:

- **il tratto αβ** rappresenta l'insieme dei portafogli ottenuti combinando i titoli α e β
- **il tratto αγ** rappresenta l'insieme dei portafogli ottenuti combinando i titoli α e γ
- **il tratto βγ** rappresenta l'insieme dei portafogli ottenuti combinando i titoli β e γ

I portafogli ottenuti combinando i titoli α e γ e i titoli β e γ sono inefficienti, in quanto dominati dai portafogli ottenuti combinando i titoli α e β

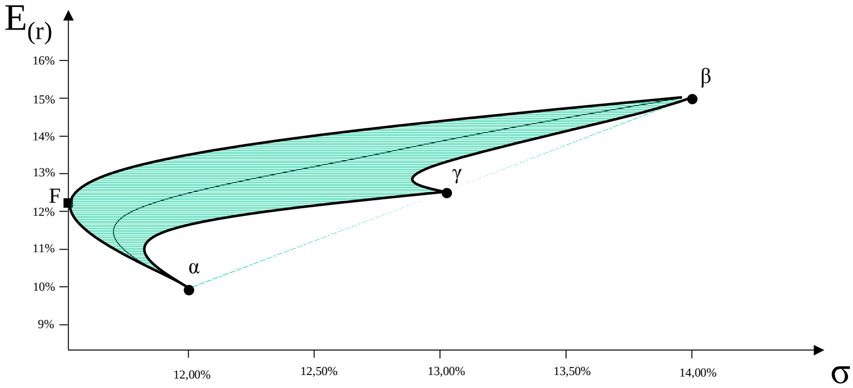
… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (14)

Le combinazioni di α, β e γ danno luogo ad una "nuvola" di punti rappresentanti l'insieme dei portafogli fattibili



… (segue): il modello di Markowitz: il caso generale (15)

Il **ramo di iperbole Fβ** rappresenta la **frontiera efficiente**



L’individuazione di un portafoglio ottimo per un investitore

L'individuazione di un portafoglio ottimo per un investitore (1)

Seguendo l'impostazione di Markowitz si è giunti all'individuazione della frontiera efficiente

Tuttavia non si è ancora analizzato come sia possibile identificare il **"portafoglio ottimo"** per l'investitore

Quest'ultimo dovrà selezionare uno dei punti della frontiera efficiente in base al **proprio livello di propensione al rischio**

… (segue): l'individuazione di un portafoglio ottimo per un investitore (2)

Al fine di individuare il portafoglio ottimo si ricorre al concetto di CURVA DI INDIFFERENZA, la quale permette di identificare le combinazioni rischio – rendimento considerate equivalenti dall'investitore

In presenza di livelli diversi di soddisfazione verrà identificata una MAPPA di curve di indifferenza

… (segue): l'individuazione di un portafoglio ottimo per un investitore (3)

Nel caso della Portfolio Selection analizzato da Markowitz vengono prese in esame delle curve di indifferenza basate su una FUNZIONE DI UTILITA' QUADRATICA

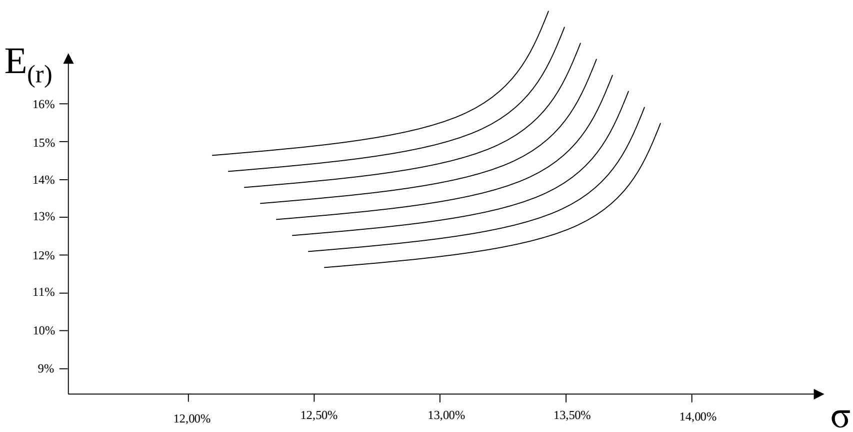
Quest'ultima infatti ha le proprietà di:

- esprimere le preferenze degli investitori **esclusivamente** in funzione di due sole variabili, il rendimento ed il rischio
  ⇨ coerenza con la **prima ipotesi** del modello di Markowitz

- riconoscere il rendimento atteso come un BENE e il rischio come un MALE
  ⇨ coerenza con la **terza ipotesi** del modello di Markowitz

… (segue): l'individuazione di un portafoglio ottimo per un investitore (4)

Nel seguente grafico si riporta un **esempio** di mappa di curve di indifferenza



… (segue): l'individuazione di un portafoglio ottimo per un investitore (5)

Come anticipato nella scorsa lezione **l'inclinazione positiva** delle curve di indifferenza identifica **l'avversione al rischio** dell'investitore

Quest'ultimo preferirà collocarsi sulle curve di indifferenza più in alto, in quanto a queste corrispondono superiori livelli di utilità.

Il punto di ottimo va però identificato all'interno dei i portafogli fattibili

… (segue): l'individuazione di un portafoglio ottimo per un investitore (6)

Il **punto di ottimo** è identificabile con il **portafoglio K**, punto di tangenza tra frontiera efficiente e "la più alta" curva di indifferenza raggiungibile