

INTRODUZIONE ALLE RUOTE DENTATE

Le ruote dentate sono organi meccanici molto diffusi e utilizzati per trasmettere il moto rotatorio tra alberi in modo da garantire la costanza del rapporto di trasmissione. La trasmissione del moto avviene tramite l'ingranamento di denti a profilo coniugato attraverso cui viene trasmessa la coppia nominale da un albero all'altro. La ruota dentata che imprime il moto, trascinando dietro di sé l'altra, è detta *motrice*, o *pignone*, la ruota che viene trascinata, subendo l'azione dell'altra, è detta *condotta*. Le due principali categorie di ruote dentate, oggetto di studio nei corsi di Costruzione di Macchine 1 e Progettazione dei Sistemi Meccanici, sono le *ruote dentate cilindriche a denti diritti* e *cilindriche a denti elicoidali* (Figura 1). Nel primo caso i denti sono paralleli all'asse di rotazione, e la trattazione teorica risulta abbastanza semplice, nel secondo caso i denti risultano inclinati rispetto all'asse e, rispetto alle prime, garantiscono una minore rumorosità, a causa dell'ingranamento più graduale, e una minore usura da contatto dei denti per la maggiore superficie di contatto offerta a parità di coppia scambiata. Per contro, come si vedrà, queste ultime introducono sugli alberi azioni interne aggiuntive rispetto alle ruote dentate a denti diritti. Le altre due principali categorie di ruote dentate sono le *ruote coniche* e le *viti senza fine* con le relative *ruote per vite senza fine*.

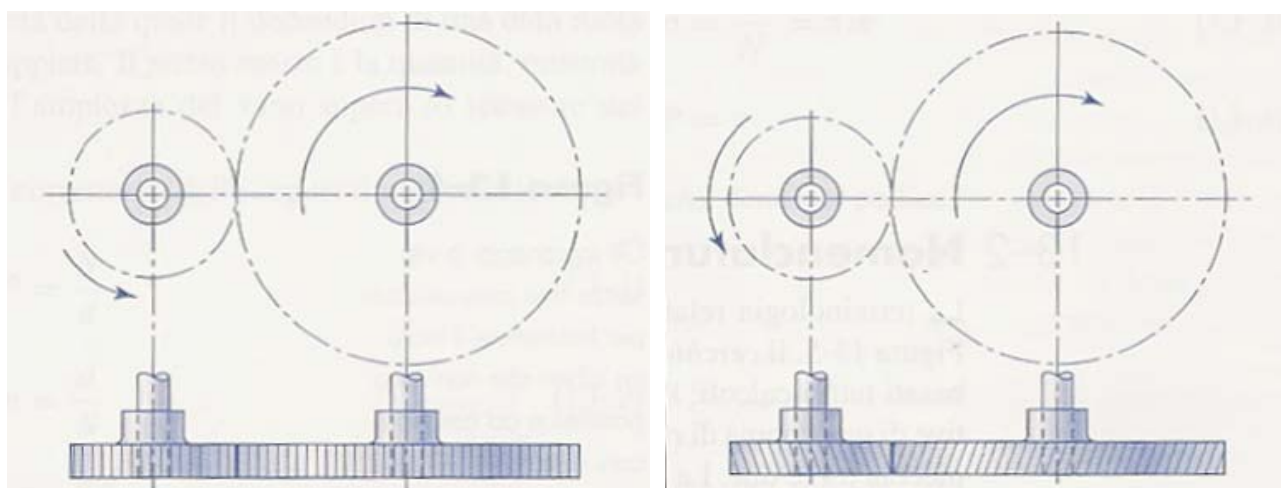


Figura 1 – Ruote dentate a denti diritti e ruote dentate a denti elicoidali [1].

Prima di passare ad analizzare le azioni che si scambiano, attraverso i denti, le ruote ingrananti è opportuno riepilogare la nomenclatura relativa a tali organi meccanici. Si farà riferimento in particolare alle ruote dentate a denti diritti.

Il *cerchio primitivo* è una circonferenza teorica di riferimento, in base alla quale è stabilito il rapporto di trasmissione e che resta costantemente tangente con quella della ruota accoppiata durante la trasmissione del moto (Figura 1). Il punto di tangenza rappresenta il punto di trasmissione del moto ideale, in quanto è l'unico punto in cui si verifica il rotolamento senza strisciamento tra i fianchi dei denti. Negli altri punti di contatto è presente anche una componente di scorrimento che induce inevitabili fenomeni d'attrito. Il diametro del cerchio primitivo è una grandezza fondamentale per le ruote dentate e viene chiamato *diametro primitivo* (d_p , di raggio r_p).

Per costruzione è previsto che per il punto di tangenza tra i cerchi primitivi passi la *retta d'azione* (o *retta delle pressioni*), fissa durante il moto, sulla quale giace, per qualsiasi posizione del punto di contatto durante l'ingranamento, la spinta risultante che si scambiano le ruote. L'angolo formato dalla retta d'azione e la direzione orizzontale, su cui giace la forza efficace nella generazione della coppia trasmessa all'albero, è detto *angolo di pressione* (α_n).

Per proporzionare una ruota dentata si fa riferimento ad una grandezza, detta *modulo* (m), attraverso la quale è possibile esprimere tutte le altre dimensioni caratteristiche della ruota mediante sua

moltiplicazione per opportuni coefficienti. Per quanto detto è evidente che la dimensione del modulo è una lunghezza, generalmente espressa in millimetri. La normativa nazionale UNI 6773 fa proprio riferimento al proporzionamento modulare per descrivere la costruzione geometrica di una ruota dentata. Il modulo è definito dal rapporto tra il diametro primitivo e il numero di denti (z) della ruota:

$$m = \frac{d_p}{z} \quad [\text{mm}] \quad (1)$$

Con riferimento alla Figura 2 le altre dimensioni essenziali nella costruzione di una ruota dentata sono:

- Il *passo primitivo* (p), o semplicemente *passo*, è l'arco di circonferenza misurato sul cerchio primitivo tra due punti omologhi appartenenti a due denti successivi:

$$p = \frac{\pi \cdot d_p}{z} = \pi \cdot m \quad (2)$$

- la *circonferenza di base* (di raggio r_b), utilizzata come geometria di riferimento nella costruzione del profilo ad evolvente di cerchio dei denti e generata dall'involuppo delle rette di costruzione ad esso normali, legata alla circonferenza primitiva dalla seguente relazione:

$$r_b = r \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

- la *circonferenza di testa*, o di *troncatura esterna* (di raggio r_a), che si ottiene a partire dalla circonferenza primitiva sfalsandola radialmente verso l'esterno di una quantità pari all'*addendum* (h_a), generalmente pari al modulo:

$$h_a = r_a - r = m \quad (4)$$

Tale circonferenza definisce l'ingombro massimo di una ruota dentata.

- la *circonferenza di piede*, o di *troncatura interna* (di raggio r_f), che si ottiene a partire dalla circonferenza primitiva sfalsandola radialmente verso l'interno di una quantità pari al *dedendum* (h_f), generalmente pari a 1.25 volte il modulo:

$$h_f = r - r_f = 1.25 \cdot m \quad (5)$$

Il dedendum deve essere necessariamente maggiore dell'addendum, altrimenti si verificherebbe il contatto tra la superficie di testa del dente e la superficie di piede sulla ruota accoppiata.

- l'*altezza del dente* (h), risultante dalla somma di addendum e dedendum:

$$h = h_a + h_f = 2.25 \cdot m \quad (6)$$

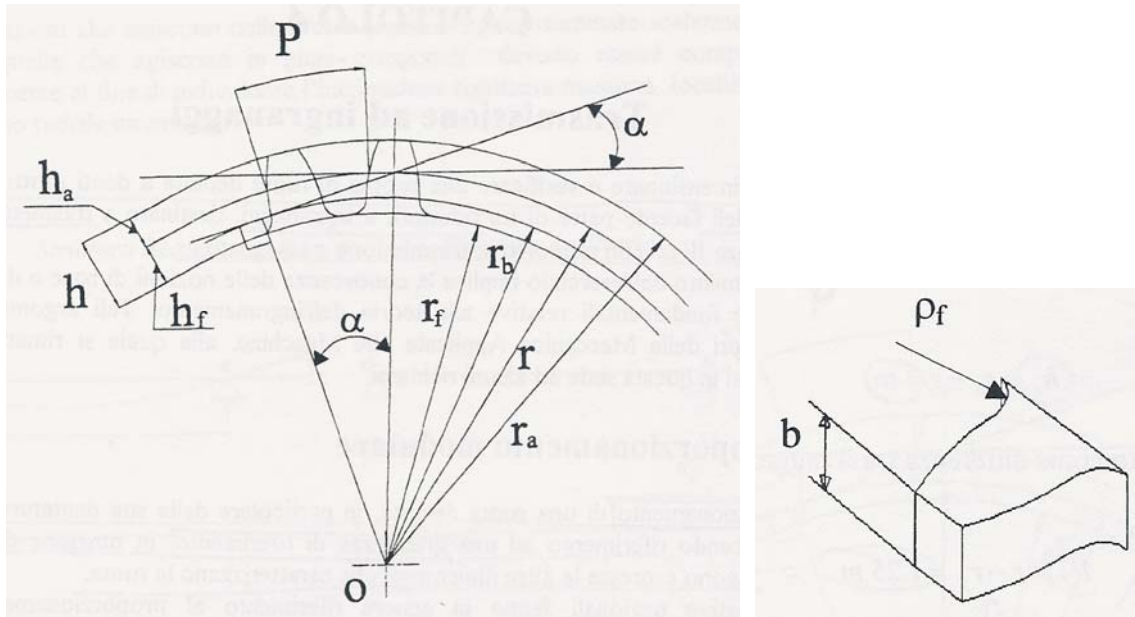


Figura 2 – Simbologia adottata [2].

- la *larghezza utile* della dentatura (b), proporzionale tramite il modulo ad un parametro γ tabulato e funzione soprattutto delle tolleranze geometriche e della rigidità dei supporti (Tabella 1):

$$b = \gamma \cdot m \quad (7)$$

Maggiore è la precisione di lavorazione e maggiore è la larghezza utile sfruttabile per la ruota.

Qualità della dentatura e condizioni di lavoro	γ
Dentatura fusa precisa oppure tagliata alla fiamma; pignone con supporti esterni non rigidi	6...10
Dentatura non rettificata, temprata	5...15
Dentatura lavorata bene, supporti nello stesso carter del ruotismo rigidi e ben allineati	10...20
Dentatura lavorata di recisione, $n_1 \leq 3000 \text{ min}^{-1}$	20...40
Superficie dei denti pressoché perfetta, elevata precisione di dentatura, supporti rigidi, $n_1 \leq 3000 \text{ min}^{-1}$	40...80

Tabella 1 – Range di riferimento per γ [2].

- il *raggio di raccordo* alla base del dente (ρ_f), indispensabile per limitare l'effetto d'intaglio in tale zona, vale generalmente:

$$\rho_f = 0.2 \cdot m \quad (8)$$

E' necessario, ai fini del corretto ingranamento tra due ruote dentate, che esse abbiano lo stesso modulo. Solo in tale situazione è possibile ottenere denti ingrananti di dimensioni geometriche perfettamente coniugate. Il rapporto di trasmissione può pertanto essere espresso come segue:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_{p1}}{d_{p2}} = \frac{m \cdot z_1}{m \cdot z_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (9)$$

Il rapporto di ingranaggio è il reciproco del rapporto di trasmissione:

$$u = \frac{1}{\tau} \quad (10)$$

COSTRUZIONE DELL'EVOLVENTE

I fianchi dei denti in presa possono essere visti come due camme a profili coniugati, che pertanto si scambiano un'azione ortogonale alla tangente alla curvatura di ciascun profilo nel punto di contatto. Perché l'azione scambiata sia sempre ortogonale al profilo è necessario che i due profili siano realizzati secondo un procedimento di involuppo reciproco. Non necessariamente si deve adottare il profilo ad evolvente come soluzione, ma per esigenze di compattezza della zona di contatto e di facilità realizzativa è praticamente l'unico profilo utilizzato per la trasmissione del moto tramite ruote dentate.

La costruzione del profilo ad evolvente è semplice e si effettua a partire dal cerchio di base di ciascuna ruota dentata. La retta delle pressioni è tangente ad entrambe le circonferenze di base e per realizzare un profilo che per ogni intersezione con tale retta sia ad essa perpendicolare, cioè per realizzare il fianco del dente, basta "srotolare", a partire dal punto di tangenza, un filo ideale avvolto su una ruota obbligandolo a giacere sulla retta delle pressioni e tracciando, istante per istante, la posizione occupata dal capo di tale filo. Le posizioni via via individuate vengono lasciate libere di procedere nel moto rotatorio, solidali alla ruota dentata (Figura 3-a). Dall'unione di tali punti ha origine il profilo cercato. Per l'altra ruota basta applicare dualmente il procedimento applicato alla prima.

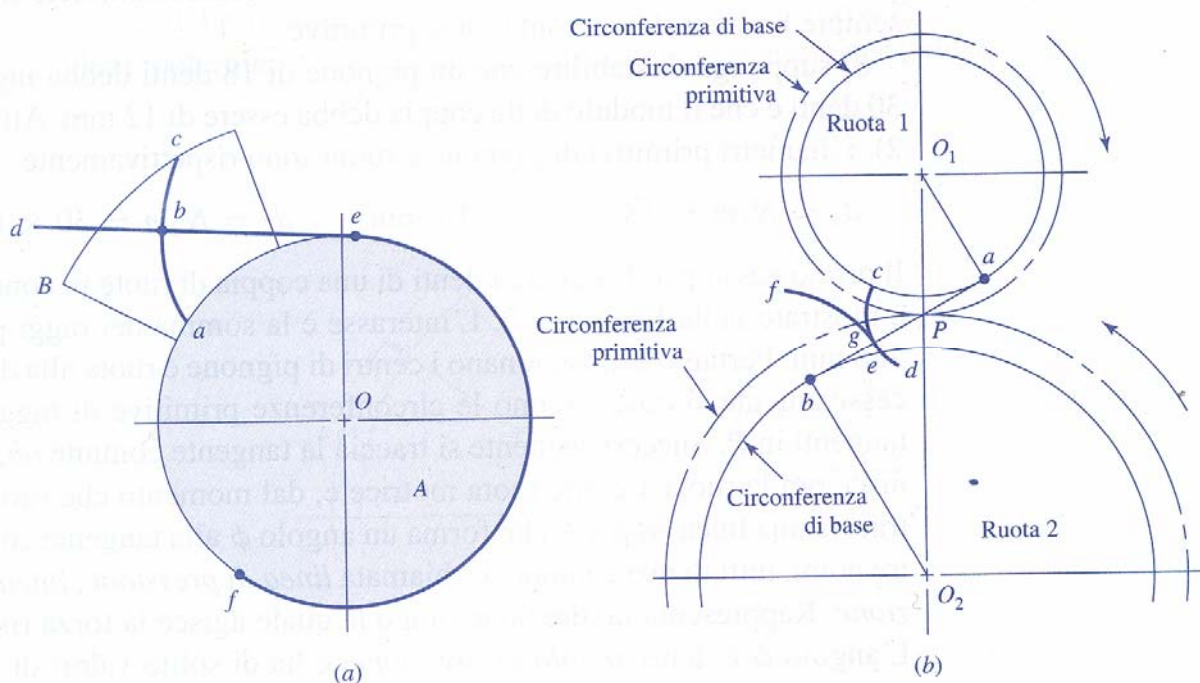


Figura 3 – Generazione del profilo ad evolvente [1].

Operativamente è possibile costruire il profilo sfruttando la cinematica inversa dell'ingranamento provvedendo a "rettilineizzare", sulla tangente al cerchio di base, nei vari tratti d'avanzamento, l'arco di circonferenza sotteso al tratto d'avanzamento complessivo raggiunto (Figura 4).

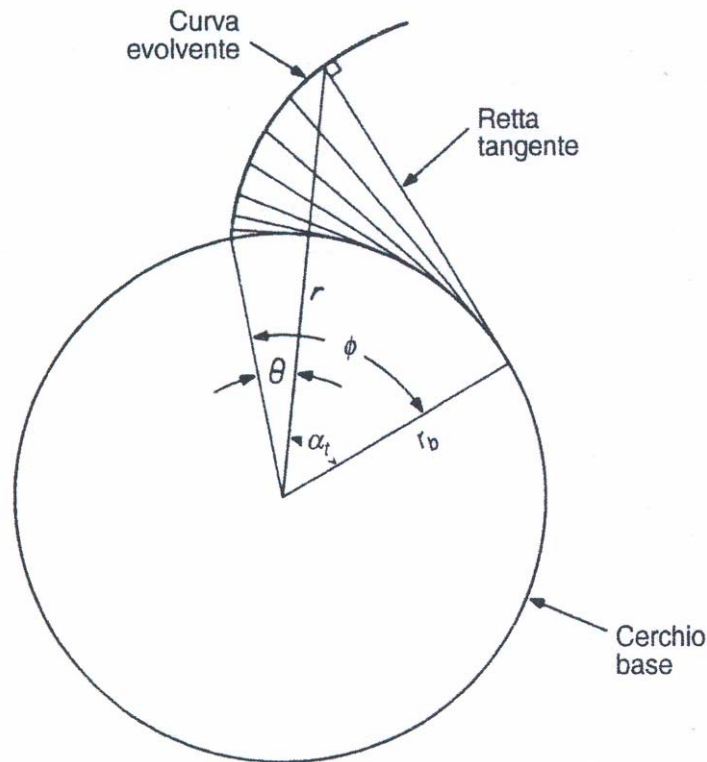


Figura 4 – Costruzione del profilo ad evolvente.

Se il diametro di troncatura interna è minore di quello di base si prolungano radialmente i fianchi dei denti fino ad incontrare, appunto, il diametro di troncatura interna.

CONTINUITA' DELL'INGRANAMENTO

Con riferimento ai simboli ed alle indicazioni riportate in Figura 5, detto che tutta la fase di contatto tra denti si sviluppa lungo la retta d'azione, è possibile individuare il segmento, su di essa giacente, che contiene tutte le posizioni successive dall'inizio del contatto, tra un dente del pignone ed uno della ruota condotta, alla sua fine, con il definitivo distacco e allontanamento tra i due denti.

Il punto *a* rappresenta l'inizio del contatto ed è determinato dall'intersezione tra il cerchio di testa del pignone e la retta delle pressioni. Dualmente *b* rappresenta la perdita del contatto tra gli stessi denti ed è individuato dall'intersezione tra il cerchi di testa della condotta e la retta delle pressioni.

Il segmento \overline{ab} compreso tra *a* e *b* sulla retta d'azione è chiamato *linea di condotta*. L'*arco di accesso* è l'arco di circonferenza e_1 , misurabile sia sulla circonferenza primitiva della ruota condotta che su quella della ruota motrice, definito a partire dal fianco del dente a inizio ingranamento fino al punto di tangenza *P* tra le circonferenze primitive. L'*arco di recesso* è l'arco di circonferenza e_2 , misurato, su ciascuna circonferenza primitiva, dal punto di tangenza *P* tra le circonferenze primitive fino al fianco del dente a fine ingranamento. La somma dei due archi rappresenta l'*arco di condotta*:

$$e_1 + e_2 = e \quad (11)$$

Evidentemente perché si abbia continuità d'ingranamento, ovvero al distacco di una coppia di denti in presa sia già iniziata la fase di ingranamento della coppia successiva, è necessario che l'arco di condotta sia maggiore del passo:

$$e > p \quad (12)$$

Generalmente si fa riferimento al *rapporto di condotta* (ε_α) per verificare la precedente condizione. In simboli:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{ab}}{p_b} > 1 \quad (13)$$

in cui p_b rappresenta il *passo base*, cioè la distanza costante tra due fianchi consecutivi misurata sulla retta d'azione. Ne consegue che la relazione tra il passo e il passo base è la seguente:

$$p_b = p \cdot \cos \alpha = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha \quad (14)$$

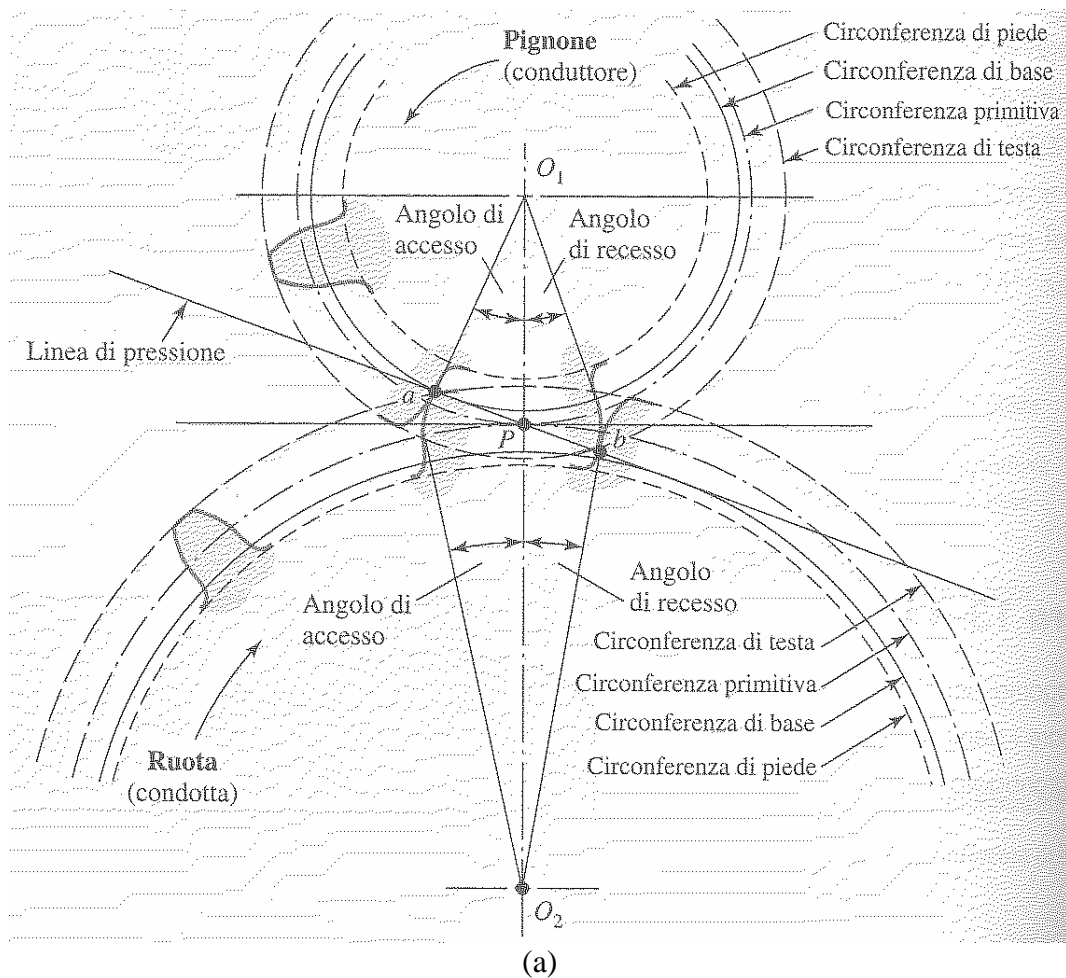


Figura 5 – Ingranamento tra ruote dentate [1].

Con riferimento alla Figura 6 è possibile esprimere la linea di condotta come segue:

$$\overline{ab} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_1 + r_2) \cdot \sin \alpha_n \quad (15)$$

Tenendo conto del proporzionamento modulare si ottiene:

$$\begin{aligned}\overline{ab} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(m \cdot z_1 + 2 \cdot m)^2 - (m \cdot z_1 \cdot \cos \alpha_n)^2} + \sqrt{(m \cdot z_2 + 2 \cdot m)^2 - (m \cdot z_2 \cdot \cos \alpha_n)^2} - m \cdot (z_1 + z_2) \cdot \sin \alpha_n \right] \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \left[\sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cdot \cos \alpha_n)^2} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cdot \cos \alpha_n)^2} - (z_1 + z_2) \cdot \sin \alpha_n \right]\end{aligned}$$

Pertanto, sostituendo nell'espressione per il rapporto di condotta, si ha:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{\frac{1}{2} m \cdot \left[\sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cdot \cos \alpha_n)^2} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cdot \cos \alpha_n)^2} - (z_1 + z_2) \cdot \sin \alpha_n \right]}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha_n} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cdot \cos \alpha_n)^2} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cdot \cos \alpha_n)^2} - (z_1 + z_2) \cdot \sin \alpha_n \right]}{\pi \cdot \cos \alpha_n} = f(z_1, z_2, \alpha_n)\end{aligned}\quad (16)$$

E' pertanto interessante osservare che ε_α non è funzione del modulo, dunque è possibile valutarlo anche durante la fase di dimensionamento, quando m non è ancora noto.

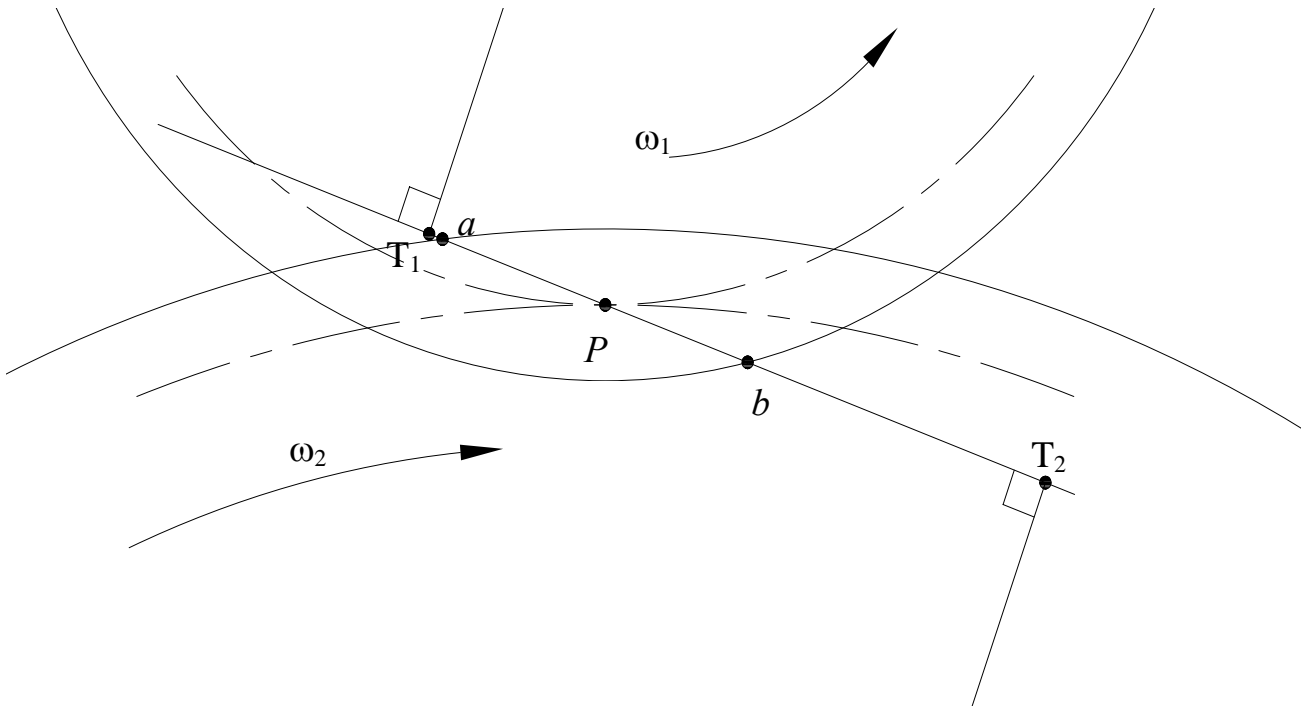


Figura 6 – Punti notevoli sulla retta delle pressioni [2].

Il fenomeno dell'*interferenza* si verifica quando si ha contatto tra i fianchi dei denti al di fuori degli estremi fissati dai punti a e b . Si verifica in tal modo un contatto tra fianchi non coniugati, di cui uno, in questi tratti, non è ad evolvente di cerchio, con tendenza da parte di uno dei due denti in presa a scavare l'altro. Realizzando i denti con processi di generazione (tramite dentiera a fianchi diritti) si elimina il problema in quanto l'utensile asporta la porzione di fianco soggetta all'interferenza. Ora però potrebbe insorgere un altro pericolo, quello del *sottotaglio*, che comporta un eccessivo indebolimento della sezione resistente alla base del dente, dove la flessione è massima in fase di ingranamento.

Valutando il caso di ingranamento tra il pignone e una dentiera a fianchi diritti, con semplici considerazioni geometriche è possibile determinare la condizione sul numero minimo di denti

necessari per evitare fenomeni di interferenza e sottotaglio:

$$h_a < \left(\frac{d_p}{2} \cdot \sin \alpha_n \right) \sin \alpha_n = \frac{1}{2} m \cdot z \cdot \sin^2 \alpha_n \Rightarrow z_{\min} = \frac{2 \cdot h_a}{m \cdot \sin^2 \alpha_n} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_n} \quad (17)$$

Un valore molto comune per l'angolo di pressione è 20° . In corrispondenza di questo dato si ha un numero minimo di denti richiesti per il pignone pari a:

$$z_{1,\min} = \frac{2}{\sin^2(20^\circ)} = \frac{2}{(0.34)^2} \cong 17$$

Utilizzando il rapporto di trasmissione τ , noto quale dato di progetto, è poi possibile determinare il numero di denti della ruota condotta. Poiché spesso il numero di denti della ruota motrice e della ruota condotta non sono numeri primi tra loro è consigliabile aumentare di una unità il numero di denti della ruota più grossa (tipicamente la condotta) in modo da evitare, rendendo z_1 e z_2 primi tra loro, situazioni di ingranamento preferenziale, cosa che molto probabilmente indurrebbe sui fianchi un fenomeno di usura disuniforme.

SPINTE SCAMBIATE

Durante l'ingranamento di una coppia di ruote dentate a denti diritti, trascurando la distribuzione delle spinte nelle condizioni con più di una coppia di denti in presa e la leggera oscillazione del modulo della spinta scambiata lungo il tratto utile (\overline{ab}) della retta d'azione è possibile ricondurre la trasmissione del moto ad un'azione F_{bn} , giacente appunto sulla retta d'azione, applicata in corrispondenza del punto di tangenza tra i diametri primitivi.

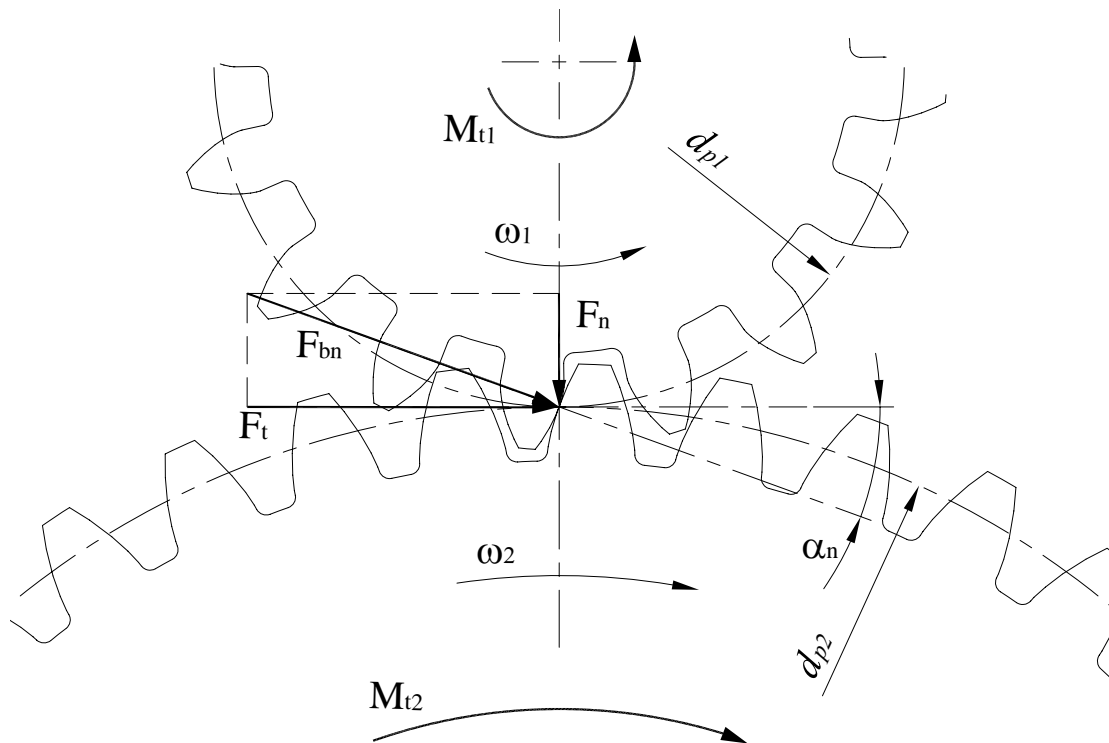


Figura 7 – Azioni scambiate da una coppia di ruote dentate a denti diritti.

Poiché la coppia torcente che deve essere trasmessa ai rispettivi alberi da parte delle ruote dentate è nota ed è valutabile come la componente tangenziale F_t tra di esse scambiata per il raggio primitivo di ognuna, è facile individuare la seguente relazione tra l'azione tangenziale e la forza complessivamente scambiata dalle due ruote:

$$F_{bn} = \frac{F_t}{\cos \alpha_n} = \frac{M_{t1(2)}}{\frac{d_{p1(2)}}{2}} \quad (18)$$

In Figura 7 sono mostrate le azioni indicate nella (18) per una coppia di ruote dentate a denti dritti. Con F_n si è indicata l'azione normale indotta dal carico, la quale determina una componente di compressione nel dente ed un'azione radiale che “punta verso l'albero. Evidentemente l'azione radiale appena indicata è legata a F_{bn} e F_t dalla seguente relazione:

$$F_n = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_n = F_{bn} \cdot \operatorname{sen} \alpha_n \quad (19)$$

FABBRICAZIONE DELLE RUOTE DENTATE

Esistono parecchi sistemi per fabbricare ruote dentate. Ad esempio si ricordano la fusione in terra, la formatura a guscio, la microfusione, la fusione in forma permanente, la pressofusione, la colata centrifuga, ma anche la sinterizzazione e l'estrusione. Per elevati rapporti tra carico trasmesso e dimensione della ruota tipicamente le ruote dentate sono realizzate in acciaio e successivamente tagliate con un *utensile di forma* oppure *per generazione*. Nel primo caso il vano del dente assume esattamente la forma dell'utensile da taglio utilizzato, mentre nel secondo l'utensile ha una forma differente dal profilo del dente da realizzare e si muove in modo opportuno rispetto alla ruota grezza da lavorare in modo da definirne la forma corretta. Recentemente sta prendendo piede anche la lavorazione mediante rullatura, o formatura a freddo, in cui matrici di durezza opportuna vengono rullate contro i pezzi grezzi per formare i denti. La qualità superficiale ottenuta è piuttosto interessante e le tensioni residue di compressione indotte in superficie hanno un effetto benefico in termini di maggiore resistenza a fatica.

Gli utensili da taglio usualmente impiegati sono le *frese*, le *stozzatrici*, i *creatori*. Le operazioni di finitura possono essere effettuate tramite lucidatura, sbavatura, rettifica o lappatura.

Esistono in commercio applicazioni che coinvolgono ruote realizzate in materiali termoplastici e ottenute tramite stampaggio a iniezione. I carichi in gioco sono chiaramente di bassa entità.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Shigley, J.E., Mischke, C.R., Budynas, R.G., *Progetto e costruzione di macchine*; McGraw-Hill, Milano, 2005.
- [2] Guagliano, M., Vergani, L., *Esercitazioni di costruzioni di macchine*; Ed. CUSL, Milano, 1999.