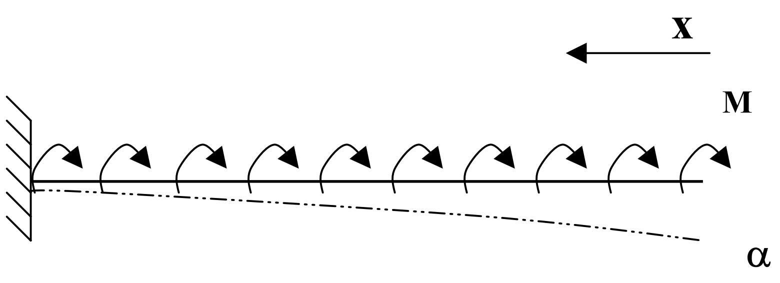
La soluzione delle equazioni differenziali con il metodo di Galerkin

Tra le procedure generalmente adottate per formulare e risolvere le equazioni differenziali con un metodo che si avvicina agli elementi finiti, ritroviamo il metodo di Galerkin.

Consideriamo un problema strutturale: una trave incastrata a un estremo, tale da soddisfare le ipotesi di de Saint-Venant, soggetta a deformazione imposta all'estremo libero, in particolare alla rotazione dell'asse medio di un angolo α.

Lungo tutta la trave, inoltre, sia presente un momento flettente uniforme, di intensità M.



La trave sarà infine caratterizzata dalle proprietà del materiale (modulo di elasticità longitudinale, E) e geometriche, momento d'inerzia J=J(x), che per semplicità considereremo costante.

L’equazione della **linea elastica** assume la forma:

$$-EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M \qquad \text{con } 0<x<L \qquad (1)$$

che presenta una evidente similitudine con l’equazione di Fourier che esprime il profilo di temperatura di un filo sottile:

$$-\mathrm{K}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{T}}{\mathrm{dx}^2}=\mathrm{Q} \qquad \text{con} 0<x<L \qquad (2)$$

In entrambi i casi ricorriamo al differenziale totale (x sia l’unica variabile indipendente).

Le **condizioni al contorno** associate al problema sono:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=0 \qquad \text{per } x=L \qquad (3)$$

$$y=0 \qquad \text{per } x=L \qquad (4)$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\alpha \qquad \text{per } x=0 \qquad (5)$$

La soluzione esatta, che si ottiene integrando la (1), è

$$y(x)=-\frac{1}{EJ}\int_x^L\left[\int_0^\zeta M(\xi)d\xi\right]d\zeta+\alpha x-\alpha L \qquad (6)$$

In questo caso c'è una soluzione analitica, con la quale paragonare la correttezza della soluzione cui perverremo: in altri casi, per la difficoltà del problema, questo non è possibile, pertanto occorre comprendere bene gli algoritmi di problemi semplici per affrontare la formulazione numerica di problemi più complessi.

La formulazione "debole"

La procedura per la costruzione di **elementi finiti** per affrontare un problema strutturale prevede che si scelga una griglia di punti, nell'intervallo $0 \leq x \leq L$, così da costituire una serie di intervalli, non sovrapposti, che coprano l'intero dominio. I punti, che chiamiamo x_k sono detti **nodi**.

Su ciascun elemento la funzione da conoscere (ci riferiremo alla deformata) si può approssimare con funzioni note, predeterminate, chiamate $\varphi_j(x)$, e corrispondenti *parametri ignoti*, a_j.

Le funzioni $\boldsymbol{\varphi_j(x)}$ sono dette **funzioni di forma**.

Il metodo degli elementi finiti inizia proprio **dalla scelta delle funzioni di forma**.

La deflessione dell'asse della trave si può esprimere come sommatoria delle funzioni di forma, ciascuna pesata per un parametro specifico:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varphi_i(x) \tag{7}$$

Con un'approssimazione del genere non possiamo chiaramente pretendere di annullare l'errore in tutto il dominio: ci sarà quindi una certa differenza fra la soluzione approssimata e quella data dall'integrazione dell'equazione differenziale.

Questa differenza può essere espressa da una funzione **residua**, dovuta proprio all'errore di approssimazione della soluzione vera y^* con la y(x):

$$R(y, x) \equiv -EJ \frac{d^2 y}{d x^2} - M \tag{8}$$

La R(y,x) non è nulla ovunque; però possiamo fare in modo che, moltiplicata per una **funzione di peso**, W(x), il suo integrale si annulli:

$$\int_0^L W(x) R(y, x) dx = 0 \tag{9}$$

La scelta di diverse funzioni $W(x)$ consente di costruire un **sistema di equazioni lineari, nelle variabili a_i** per arrivare a un'approssimazione della deformata (nota la deformata il problema è risolto perché è nota la linea elastica della trave).

Nella **formulazione di Galerkin**, ***le funzioni di peso sono uguali alle funzioni di forma***, cioè:

$$W_i(x) = \varphi_i(x) \qquad (10)$$

Dato che il numero di parametri ignoti a_j è pari a quello delle funzioni di forma φ_j, si ha un sistema di equazioni lineari che ha una soluzione, e questa è unica se le condizioni al contorno sono ben poste e ben definite.

Notiamo che la formulazione ai residui pesati di un problema differenziale non cambia anche se variano le condizioni di carico e vincolo; analogamente, la formulazione debole rimane la stessa, perché si ricava senza riferimento alle condizioni al contorno.

Il vantaggio della formulazione di Galerkin è che **rimane da determinare un numero finito di parametri, a_i**, $\forall$ i=1, 2, …, n+1, anziché il valore di $y(x)$ *in ogni punto dell'intervallo $0 \leq x \leq L$.*

Applicazione al problema strutturale

Secondo la procedura di Galerkin, per il nostro problema strutturale si ottiene:

$$\int_0^L \mathrm{W}(x)\mathrm{R}(y,x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \mathrm{W_i(x)= \varphi_i(x)} \qquad \mathrm{R}(y,x) \equiv -\mathrm{EJ}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2} - \mathrm{M}$$

$$\int_0^L \varphi(x)\left[-EJ\frac{d^2 y}{dx^2} - M\right]dx = 0 \tag{11}$$

e si deve scegliere la **φ(x) appropriata**.

Dato che la deformata è una funzione continua in x, la forma più semplice è quella di una **spezzata polinomiale** su ciascun elemento.

Sfortunatamente la **derivata prima di una spezzata non è continua**, e in queste discontinuità (di prima specie) non esiste derivata seconda; tuttavia, ***<u>la richiesta di esistenza della derivata seconda sul dominio è troppo restrittiva per consentire l'applicazione a problemi reali (e' per questo che si parla di formulazione debole).</u>***

Una soluzione a questa difficoltà viene dall'applicazione del metodo di integrazione per parti alla derivata seconda nella (11):

$$\int_0^L \varphi(x)\left[-EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx = -EJ\varphi\frac{dy}{dx}\bigg|_0^L - \left[\int_0^L -EJ\frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{dx}dx\right] \quad (12)$$

perciò, sostituendo, possiamo scrivere la (11) come:

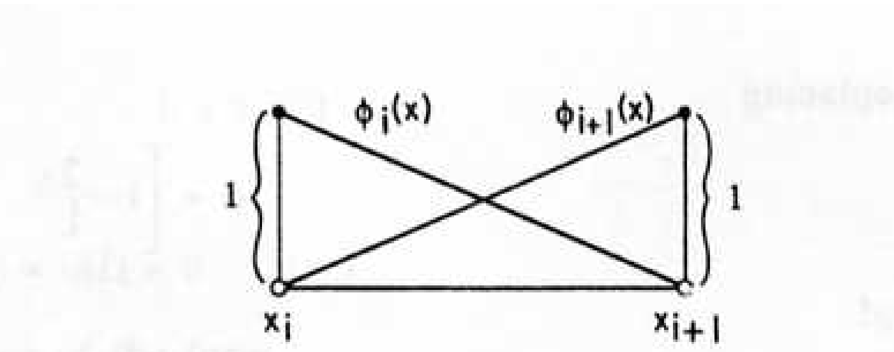
$$\int_0^L EJ\frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{dx}dx - \int_0^L \varphi M dx - EJ\varphi\frac{dy}{dx}\bigg|_0^L = 0 \qquad (13)$$

Per illustrare la procedura prendiamo in esame la trave divisa in due soli elementi: la deformata della trave si può scrivere come somma di due funzioni lineari; su ogni elemento, si può scrivere

$$y^{(i)}(x) = a_i\varphi_i(x) + a_{i+1}\varphi_{i+1}(x) \qquad x_i \le x \le x_{i+1} \qquad (14)$$

in cui, per ciascun elemento si ha:

$$\begin{cases} \varphi_i(x) = \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \\ \varphi_{i+1}(x) = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{cases} \qquad (15)$$



Notiamo che le funzioni φ_i descritte nella (15) sono le "funzioni di forma" di cui si è discusso sinora; le φ_{i+1} sono ancora funzioni riferite all'elemento i-esimo. Per chiarezza ricordiamo che l'elemento i-esimo è compreso fra il nodo x_i e x_{i+1}.

Per chiarire come si costruiscano queste funzioni, consideriamo una suddivisione in 5 elementi; sul terzo si può scrivere:

$$\begin{cases} \varphi_3(x) = \dfrac{x_4 - x}{x_4 - x_3} \\ \varphi_4(x) = \dfrac{x - x_3}{x_4 - x_3} \end{cases}$$

sul successivo (il quarto) di conseguenza sarà:

$$\begin{cases} \varphi_4(x) = \dfrac{x_5 - x}{x_5 - x_4} \\ \varphi_5(x) = \dfrac{x - x_4}{x_5 - x_4} \end{cases}$$

mentre la deformata approssimata sul quarto elemento è, secondo la (14):

$$y^{(4)}(x) = a_4\varphi_4(x) + a_5\varphi_5(x)$$

La deformata complessiva della trave è fornita dalla composizione delle deformate di ciascun elemento considerate singolarmente.
Dalla (14) si può ottenere, generalizzando la (13):

$$\sum_{j=1}^{n+1} EJ\left[\int_0^L \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx\right]a_j - \int_0^L \varphi_i M dx + \varphi_i\left(-EJ\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^L = 0 \,,$$

$\forall$ i=1, 2, …, n+1 (16)

le derivate delle funzioni di forma sono

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_i(x)}{dx} = -\dfrac{1}{x_{i+1}-x_i} \\ \dfrac{d\varphi_{i+1}(x)}{dx} = \dfrac{1}{x_{i+1}-x_i} \end{cases} \qquad (17)$$

Si può scrivere la relazione (14) in **forma matriciale**, con

$$y^{(i)}(x) = a_i\varphi_i(x) + a_{i+1}\varphi_{i+1}(x) \qquad (14)$$

$\mathbf{y} = \varphi \cdot \mathbf{a}$, dove (18)

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathrm{i}} & \varphi_{\mathrm{i+1}} \end{bmatrix} \qquad (19)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_i} \\ \mathrm{a_{i+1}} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

da cui si ottiene

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{d\varphi_i}{dx} & \frac{d\varphi_{i+1}}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \tag{21}$$